Алгебра 1 18.12.2010.

Први колоквијум, Л смер

А Нека је G скуп свих инверзибилних матрица над пољем $\mathbb{Z}_5$ које комутирају са матрицом $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

1° Доказати да је скуп G и једна подгрупа линеарне групе $\mathbb{GL}(2, \mathbb{Z}_5)$. Да ли је G комутативна? Одредити ред групе G.

2° Показати да је скуп H свих матрица облика
H: $\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $(x \in \mathbb{Z}_5)$
једна подгрупа групе G. Одредити ред од H.

3° Доказати да је са
$f(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
дефинисан један хомоморфизам адитивне групе $\mathbb{Z}_5$ у групу H.

4° Одредити редове елемената $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ у групи G, а затим и ред елемента $C = AB$.

5° Нека је K подгрупа групе G генерисана елементом A. Да ли је $G = HK$?

6° Да ли је група G циклична?

Б Нека је $\mathbb{G}$ циклична група реда 42, $G = \langle a \rangle$.

1° Одредити све генераторе групе G као и редове елемената a^3, a^7 и a^{21}.

2° Колико правих подгрупа има група G? Одредити бар по један генератор сваке од њих.

3° Колики је ред групе $AutG$?

4° Одредити све хомоморфизме групе G у групу K која је реда 55.

В Дате су пермутације скупа $\{1, 2, ..., 8\}$

$\pi = \lceil 7,3,4,2,8 \rfloor \lceil 4,3 \rfloor \lceil 4,6 \rfloor$ и

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 1 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

1° Представити пермутације π и σ као производ дисјунктних циклуса из $\mathbb{S}_8$.

2° Одредити знак и ред пермутација π и σ у групи $\mathbb{S}_8$.

3° Одредити максималан ред елемента у групи $\mathbb{S}_8$ као и број елемената тог реда.

4° Израчунати пермутације $\sigma^2\pi\sigma^{-2}$, $\sigma\pi\sigma^{-1}$, π^{2010} и σ^{2010}.

Алгебра 1 18.12.2010.

Први колоквијум, Л смер

А Нека је G скуп свих инверзибилних матрица над пољем $\mathbb{Z}_5$ које комутирају са матрицом $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

1° Доказати да је скуп G и једна подгрупа линеарне групе $\mathbb{GL}(2, \mathbb{Z}_5)$. Да ли је G комутативна? Одредити ред групе G.

2° Показати да је скуп H свих матрица облика
H: $\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $(x \in \mathbb{Z}_5)$
једна подгрупа групе G. Одредити ред од H.

3° Доказати да је са
$f(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
дефинисан један хомоморфизам адитивне групе $\mathbb{Z}_5$ у групу H.

4° Одредити редове елемената $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ у групи G, а затим и ред елемента $C = AB$.

5° Нека је K подгрупа групе G генерисана елементом A. Да ли је $G = HK$?

6° Да ли је група G циклична?

Б Нека је $\mathbb{G}$ циклична група реда 42, $G = \langle a \rangle$.

1° Одредити све генераторе групе G као и редове елемената a^3, a^7 и a^{21}.

2° Колико правих подгрупа има група G? Одредити бар по један генератор сваке од њих.

3° Колики је ред групе $AutG$?

4° Одредити све хомоморфизме групе G у групу K која је реда 55.

В Дате су пермутације скупа $\{1, 2, ..., 8\}$

$\pi = \lceil 7,3,4,2,8 \rfloor \lceil 4,3 \rfloor \lceil 4,6 \rfloor$ и

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 1 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

1° Представити пермутације π и σ као производ дисјунктних циклуса из $\mathbb{S}_8$.

2° Одредити знак и ред пермутација π и σ у групи $\mathbb{S}_8$.

3° Одредити максималан ред елемента у групи $\mathbb{S}_8$ као и број елемената тог реда.

4° Израчунати пермутације $\sigma^2\pi\sigma^{-2}$, $\sigma\pi\sigma^{-1}$, π^{2010} и σ^{2010}.