Колоквијум из Алгебре 1 **7.12.2013.**
Р смер

$\boxed{1}$ Нека је $G = \left\{ A_{x,y} = \begin{bmatrix} x+7y & 5y \\ -10y & x-7y \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : \ x^2+y^2 \neq 0 \right\}$.

а) Доказати да је скуп G комутативна група у односу на множење матрица. Да ли је G подгрупа линеарне групе $GL(2,\mathbb{R})$?

б) Ако је $f : \mathbb{C}^* \to G$ дефинисано са $f(x+iy) = A_{x,y}$, доказати да је пресликавање f изоморфизам мултипликативне групе $\mathbb{C}^*$ комплексних бројева који нису нула и групе G.

в) Одредити све елементе реда 2 и реда 3 у групи G. Да ли постоји елемент реда 6 у групи G?

$\boxed{2}$ Нека је G циклична група $(\mathbb{Z}_{18}, +_{18})$.

а) Одредити све генераторе групе G.

б) Колико правих подгрупа има група G?
За сваку од тих подгрупа одредити бар по један генератор.

в) Одредити редове елемената 12 и 14 у групи G, као и све елементе реда 4 и реда 6.

г) Доказати да је $K = \{2,4,6,8\}$ циклична група у односу на множење по модулу 10.

д) Колико има хомоморфизама $f : G \to K$?

$\boxed{3}$ Дате су пермутације скупа $\{1,2,\ldots,10\}$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 1 & 8 & 10 & 9 & 3 & 4 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \text{ и}$$

$$\rho = (1,4,8,3)(2,3,9,10)(7,9,2,8,6).$$

а) Пермутације σ, ρ, $\alpha = \sigma\rho$ и $\beta = \rho\sigma$ представити као производ дисјунктних циклуса, а затим одредити знак и ред ових пермутација у групи $\mathbb{S}_{10}$.

б) Наћи бар једну пермутацију $\pi \in \mathbb{S}_{10}$, уколико она постоји, тако да је $\pi\alpha\pi^{-1} = \beta$.

в) Нека је H скуп свих пермутација из $\mathbb{S}_{10}$ које комутирају са α. Доказати да је H подгрупа групе $\mathbb{S}_{10}$ и одредити њен ред.

г) Ако подгрупа K групе $\mathbb{S}_{10}$ садржи пермутацију σ, доказати да она садржи једнак број парних и непарних пермутација.

Колоквијум из Алгебре 1 **7.12.2013.**
Р смер

$\boxed{1}$ Нека је $G = \left\{ A_{x,y} = \begin{bmatrix} x+7y & 5y \\ -10y & x-7y \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : \ x^2+y^2 \neq 0 \right\}$.

а) Доказати да је скуп G комутативна група у односу на множење матрица. Да ли је G подгрупа линеарне групе $GL(2,\mathbb{R})$?

б) Ако је $f : \mathbb{C}^* \to G$ дефинисано са $f(x+iy) = A_{x,y}$, доказати да је пресликавање f изоморфизам мултипликативне групе $\mathbb{C}^*$ комплексних бројева који нису нула и групе G.

в) Одредити све елементе реда 2 и реда 3 у групи G. Да ли постоји елемент реда 6 у групи G?

$\boxed{2}$ Нека је G циклична група $(\mathbb{Z}_{18}, +_{18})$.

а) Одредити све генераторе групе G.

б) Колико правих подгрупа има група G?
За сваку од тих подгрупа одредити бар по један генератор.

в) Одредити редове елемената 12 и 14 у групи G, као и све елементе реда 4 и реда 6.

г) Доказати да је $K = \{2,4,6,8\}$ циклична група у односу на множење по модулу 10.

д) Колико има хомоморфизама $f : G \to K$?

$\boxed{3}$ Дате су пермутације скупа $\{1,2,\ldots,10\}$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 1 & 8 & 10 & 9 & 3 & 4 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \text{ и}$$

$$\rho = (1,4,8,3)(2,3,9,10)(7,9,2,8,6).$$

а) Пермутације σ, ρ, $\alpha = \sigma\rho$ и $\beta = \rho\sigma$ представити као производ дисјунктних циклуса, а затим одредити знак и ред ових пермутација у групи $\mathbb{S}_{10}$.

б) Наћи бар једну пермутацију $\pi \in \mathbb{S}_{10}$, уколико она постоји, тако да је $\pi\alpha\pi^{-1} = \beta$.

в) Нека је H скуп свих пермутација из $\mathbb{S}_{10}$ које комутирају са α. Доказати да је H подгрупа групе $\mathbb{S}_{10}$ и одредити њен ред.

г) Ако подгрупа K групе $\mathbb{S}_{10}$ садржи пермутацију σ, доказати да она садржи једнак број парних и непарних пермутација.