Алгебра 2 **05.09.2016.**
Л смер

$\boxed{1}$ а) Доказати да је $K = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ комутативан потпрстен прстена $M_2(\mathbb{R})$, али да K није ни поље ни интегрални домен.

б) Доказати да је $I = \{p(X) \in \mathbb{R}[X] : \ p(0) = 0,\ p'(0) = 0\}$ идеал прстена $\mathbb{R}[X]$ генерисан полиномом X^2.

в) Доказати да је са

$$\phi : p \mapsto \begin{bmatrix} p(0) & p'(0) \\ 0 & p(0) \end{bmatrix}$$

дефинисан епиморфизам прстена $\mathbb{R}[X]$ на прстен K и одредити његово језгро $\mathrm{Ker}\phi$.

г) Доказати да идеал I није ни прост ни максималан.

$\boxed{2}$ Нека је $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{7}$.

а) Доказати да је $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{7}) = \mathbb{Q}(\alpha)$.

б) Одредити минимални полином μ_α елемента α над $\mathbb{Q}$, као и факторизацијско поље полинома μ_α над пољем $\mathbb{Q}$.

в) Одредити полином најмањег степена $q \in \mathbb{Q}[X]$ за који је $\frac{1}{\alpha^2 - 2} = q(\alpha)$.

$\boxed{3}$ Нека је $f(X) = X^3 + 2X^2 + 2X + 2 \in \mathbb{Z}_5[X]$.

а) Доказати да је полином f нераставља у прстену $\mathbb{Z}_5[X]$, а затим да је $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_5[X]/_{\langle f \rangle}$ поље.

б) Одредити једну базу векторског простора $\mathbb{F}$ над пољем $\mathbb{Z}_5$ као и број елемената поља $\mathbb{F}$.

в) Одредити мултипликативни инверз елемената $X^2 + 2X + 2 + \langle f \rangle$ у пољу $\mathbb{F}$.

$\boxed{4}$ Нека је $R = \mathbb{Z}_2[X]/_{\langle X^4+1 \rangle}$.

а) Доказати да је пресликавање $\pi : R \to R$ дефинисано са $\pi(r) = Xr$ пермутација на скупу R.

б) Ако група G генерисана пермутацијом π дејствује на скуп R пермутовањем, одредити орбите и стабилизаторе свих елемената из R при овом дејству.
Колико има различитих орбита?

$\boxed{5}$ а) Доказати да група G реда 9045 има нормалну подгрупу реда 67 или реда 5.

б) Доказати да група G реда 9045 има подгрупу M реда $67 \cdot 5$, а затим да је M циклична.

в) Доказати да је група реда 96 није проста.

Све одговоре детаљно образложити