Алгебра 3, Јун 2015. *22. јун 2015.*

1. Испитати да ли је $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$, прстен функција $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, Нетерин.

2. Нека је A максималан потпрстен од $\mathbb{R}$ који не садржи $1/2$. **(а)** Доказати да $1/2$ није интегралан над A. **(б)** Доказати да је A интегрално затворен у $\mathbb{R}$.

3. Нека су $f, g \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}(\omega))$ дати са: $f : \omega \mapsto 1/\omega$ и $g : \omega \mapsto i\omega$. Одредити међупоља раширења $\mathbb{C}(\omega)/\mathbb{C}(\omega)^{\langle f,g \rangle}$.

4. Нека је p непаран прост број и α реалан корен полинома $X^{2^p} - pX - 2p$. Испитати да ли је α конструктибилан.

5. Испитати да је $\mathbb{Q}(\varepsilon_7) = \mathbb{Q}(\varepsilon_7 + \varepsilon_7^5)$.

6. Нека је $E = \mathbb{F}_p(\omega, \theta)$ и $F = \mathbb{F}_p(\omega^p - \omega, \theta^p - \omega)$. Израчунати $|E : F|$, $|E : F|_s$ и $|E : F|_{pi}$.

7. Нека је K/F алгебарско раширење. Доказати импликацију (1) $\Rightarrow$ (2), где је:

(1) ако је $\bar{K}$ неко алгебарско затворење поља K и ако је $\sigma : K \longrightarrow \bar{K}$ произвољно F-утапање, онда је $\sigma(K) = K$;

(2) ако је $F \subseteq L \subseteq K \subseteq K_1$ неки ланац раширења поља и ако је $\sigma : L \longrightarrow K_1$ произвољно F-утапање, онда мора бити $\sigma(L) \subseteq K$ и постоји неки F-аутоморфизам $\tau \in \mathcal{G}(K/F)$ такав да је $\tau\,|_L = \sigma$.

8. Дат је идеал $J = \langle X^2 + Y^2 + U^2, XY + YU + UX \rangle \subseteq \mathbb{C}[X, Y, U]$. Одредити $Z(J)$ и $I(Z(J))$.

Алгебра 3, Јун 2015. *22. јун 2015.*

1. Испитати да ли је $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$, прстен функција $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, Нетерин.

2. Нека је A максималан потпрстен од $\mathbb{R}$ који не садржи $1/2$. **(а)** Доказати да $1/2$ није интегралан над A. **(б)** Доказати да је A интегрално затворен у $\mathbb{R}$.

3. Нека су $f, g \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}(\omega))$ дати са: $f : \omega \mapsto 1/\omega$ и $g : \omega \mapsto i\omega$. Одредити међупоља раширења $\mathbb{C}(\omega)/\mathbb{C}(\omega)^{\langle f,g \rangle}$.

4. Нека је p непаран прост број и α реалан корен полинома $X^{2^p} - pX - 2p$. Испитати да ли је α конструктибилан.

5. Испитати да је $\mathbb{Q}(\varepsilon_7) = \mathbb{Q}(\varepsilon_7 + \varepsilon_7^5)$.

6. Нека је $E = \mathbb{F}_p(\omega, \theta)$ и $F = \mathbb{F}_p(\omega^p - \omega, \theta^p - \omega)$. Израчунати $|E : F|$, $|E : F|_s$ и $|E : F|_{pi}$.

7. Нека је K/F алгебарско раширење. Доказати импликацију (1) $\Rightarrow$ (2), где је:

(1) ако је $\bar{K}$ неко алгебарско затворење поља K и ако је $\sigma : K \longrightarrow \bar{K}$ произвољно F-утапање, онда је $\sigma(K) = K$;

(2) ако је $F \subseteq L \subseteq K \subseteq K_1$ неки ланац раширења поља и ако је $\sigma : L \longrightarrow K_1$ произвољно F-утапање, онда мора бити $\sigma(L) \subseteq K$ и постоји неки F-аутоморфизам $\tau \in \mathcal{G}(K/F)$ такав да је $\tau\,|_L = \sigma$.

8. Дат је идеал $J = \langle X^2 + Y^2 + U^2, XY + YU + UX \rangle \subseteq \mathbb{C}[X, Y, U]$. Одредити $Z(J)$ и $I(Z(J))$.