Алгебра 3, колоквијум 2013/14. *13. април 2014.*

1. Нека су $p(X), q(X) \in k[X]$ несводљиви полиноми, α неки корен полинома $p(X)$ и β неки корен полинома $q(X)$. Доказати да је $p(X)$ несводљив над $k(\beta)$ акко је $q(X)$ несводљив над $k(\alpha)$.

   Решење. Без умањења општости, претпоставимо да су дати полиноми монични. Тада је $\mu_{\alpha,k}(X) = p(X)$ и $\mu_{\beta,k}(X) = q(X)$. Приметимо да је $p(X)$ несводљив над $k(\beta)$ акко $\mu_{\alpha,k(\beta)}(X) = p(X) = \mu_{\alpha,k}(X)$ акко $|k(\alpha,\beta) : k(\beta)| = |k(\alpha) : k|$. Слично, $q(X)$ је несводљив над $k(\alpha)$ акко $|k(\alpha,\beta) : k(\alpha)| = |k(\beta) : k|$.

   Према ланчаном правилу на ланце са дијаграма:

$$\begin{tikzcd}
 & k(\alpha,\beta) \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\
k(\alpha) \arrow[dr, no head] & & k(\beta) \arrow[dl, no head] \\
 & k &
\end{tikzcd}$$

   имамо да је $|k(\alpha,\beta) : k| = |k(\alpha,\beta) : k(\alpha)| \cdot |k(\alpha) : k| = |k(\alpha,\beta) : k(\beta)| \cdot |k(\beta) : k|$, одакле заиста следи $|k(\alpha,\beta) : k(\beta)| = |k(\alpha) : k|$ акко $|k(\alpha,\beta) : k(\alpha)| = |k(\beta) : k|$. $\square$

2. Нека је F коренско поље полинома $(X^2 - 2X - 1)(X^2 - 2X - 7)$ над $\mathbb{Q}$. Одредити $\mathrm{Aut}(F)$.

   Решење. Корени датог полинома су $1 \pm \sqrt{2}, 1 \pm 2\sqrt{2}$, па је јасно $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Поље F има два аутоморфизма који су дати са: $\sqrt{2} \mapsto \sqrt{2}$ и $\sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2}$. (Образложити детаље.) $\square$

3. а) Ако је t трансцендентан над $\mathbb{Q}$, доказати да су сви елементи из $\mathbb{Q}(t) \setminus \mathbb{Q}$ трансцендентни над $\mathbb{Q}$.

   б) Испитати да ли је $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \pi)/\mathbb{Q}$ просто раширење.

   Решење. Ако $\alpha \in \mathbb{Q}(t) \setminus \mathbb{Q}$, тада је $\alpha = p(t)/q(t)$, где су $p(X), q(X) \in \mathbb{Q}[X]$ узајамно прости полиноми. Тада је (познато са вежби – образложити) $|\mathbb{Q}(t) : \mathbb{Q}(\alpha)| = \max\{\deg p(X), \deg q(X)\}$. Па из ланчастог правила на ланац $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(\alpha) \leq \mathbb{Q}(t)$ закључујемо да је $|\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}| = \infty$, јер је t трансцендентан. Дакле и α је трансцендентан.

   Ако је $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \pi)/\mathbb{Q}$ просто раширење, тада је $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \pi) = \mathbb{Q}(t)$. Како је π трансцендентан, то и t мора бити трансцендентан. Међутим, како $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(t) \setminus \mathbb{Q}$ и како је $\sqrt{2}$ алгебарски, то није могуће према претходном делу задатка. $\square$

4. За поље k кажемо да је локално–коначно ако је свако његово коначно генерисано потпоље коначно. Доказати да је k локално–коначно акко је k алгебарско раширење поља $\mathbb{F}_p$, за неки прост број p.

   Решење. Претпоставимо да је k локално–коначно. Тада је његово базно поље (потпоље генерисано са 1) коначно, па је једнако неком $\mathbb{F}_p$, за неки прост број p. Ако је $\alpha \in k$ било који елемент, према претпоставци потпоље генерисано са α, а то је $\mathbb{F}_p(\alpha)$, је коначно. Према томе α је алгебарски елемент над $\mathbb{F}_p$. дакле, $k\mathbb{F}_p$ је алгебарско раширење.

   Претпоставимо да је $k/\mathbb{F}_p$, за неки прост p, алгебарско раширење. Потпоље од k генерисано са коначно много елемената $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ је $\mathbb{F}_p(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. У питању је коначно раширење поља $\mathbb{F}_p$, јер је генерисано са коначно много алгебарских елемената. А коначно раширење коначног поља је коначно. Дакле, k је локално–коначно. $\square$

5. Нека је $k = \mathbb{F}_7(\omega)$ поље рационалних израза са неодређеном ω, $p(X) = X^{21} + \omega X^7 + \omega \in k[X]$ и F коренско поље полинома $p(X)$ над k. Израчунати $|F : k|$ и $|F : k|_s$. Одредити $\mathrm{Aut}_k(F)$.

   Решење. Полином $p(X)$ је несводљив над k (Ајзенштајн и Гаус). Лако видимо да је $p(X) = p_s(X^7)$, где је $p_s(X) = X^3 + \omega X + \omega$ несводљив сепарабилан полином, па је $p(X)$ полином сепарабилног степена 3 и чисто несепарабилног степена 7. Дакле, $p(X)$ има три различита корена α, β, γ, од којих је сваки вишеструкости 7. Дакле, $p(X) = (X - \alpha)^7 (X - \beta)^7 (X - \gamma)^7 = (X^7 - \alpha^7)(X^7 - \beta^7)(X^7 - \gamma^7)$.

Виетова правила нам дају да је $(\alpha\beta\gamma)^7 = -\omega$, одакле следи да $\sqrt[7]{\omega} \in k(\alpha,\beta,\gamma) = F$. (Са $\sqrt[7]{\omega}$ означавамо корен полинома $X^7 - \omega$, што није вишезначно, јер тај полином над k има само један корен вишеструкости 7.)

Посматрајмо ланац $k \leq k(\sqrt[7]{\omega}) \leq F$. Приметимо да је $p(X) = X^{21} + \omega X^7 + \omega = (X^3 + \sqrt[7]{\omega}X + \sqrt[7]{\omega})^7$ растављање полинома $p(X)$ над $k(\sqrt[7]{\omega})$. Означимо са $q(X) = X^3 + \sqrt[7]{\omega}X + \sqrt[7]{\omega}$. Дакле, α,β,γ задовољавају полином $q(X)$ над $k(\sqrt[7]{\omega})$, тј. F је коренско поље полинома $q(X)$ над $k(\sqrt[7]{\omega})$.

Поље $k(\sqrt[7]{\omega}) = \mathbb{F}_7(\omega, \sqrt[7]{\omega}) = \mathbb{F}_7(\sqrt[7]{\omega})$ је поље разломака домена $\mathbb{F}_7[\sqrt[7]{\omega}]$. У овом домену је $\sqrt[7]{\omega}$ прост елемент, па је по Ајзенштајновом критеријуму и Гаусовој леми $q(X)$ несводљив над $k(\sqrt[7]{\omega})$. Према критеријуму са часа, коренско раширење $F/k(\sqrt[7]{\omega})$ зависи од корена из дискриминанте полинома $q(X)$. Дискриминанта је $\Delta(q) = -4\sqrt[7]{\omega}^3 - 27\sqrt[7]{\omega}^2 = 3\sqrt[7]{\omega}^3 + \sqrt[7]{\omega}^2 = \sqrt[7]{\omega}^2(3\sqrt[7]{\omega}+1)$, и њен квадрат очигледно не припада $k(\sqrt[7]{\omega})$. Према критеријуму закључујемо да је $|F : k(\sqrt[7]{\omega})| = |F : k(\sqrt[7]{\omega})|_s = 6$ и $\mathrm{Aut}_{k(\sqrt[7]{\omega})}(F) \cong \mathbb{S}_3$.

Очигледно је (Зашто?) $|k(\sqrt[7]{\omega}) : k| = 7$, а $|k(\sqrt[7]{\omega}) : k|_s = 1$, па по ланчаним правилима за степен и сепарабилан степен добијамо $|F : k| = 42$, а $|F : k|_s = 6$. Како је F/k нормално (јер је то коренско раширење полинома $p(X)$), то је $\mathrm{Aut}_k(F) = \mathrm{Hom}_k(F, k^a)$, па је $|\mathrm{Aut}_k(F)| = |\mathrm{Hom}_k(F, k^a)| = |F : k|_s = 6$. Са друге стране јасно је да је $\mathrm{Aut}_{k(\sqrt[7]{\omega})}(F) \leq \mathrm{Aut}_k(F)$, па како су истих редова коначно добијамо $\mathrm{Aut}_k(F) \cong \mathbb{S}_3$. $\square$