Алгебра 3, Септембар 2016. *9. септембар 2016.*

1. Нека су $R \leqslant S \leqslant R[X]$ прстени. Ако је S Нетерин, доказати да је и R Нетерин.

Решење. Нека је Y још једна независна. По Хилбертовој теореми о бази, како је S Нетерин, и $S[Y]$ је Нетерин. Уочимо хомоморфизам $\phi : S[Y] \longrightarrow R[X]$ дефинисан са: $s \mapsto s$, $s \in S$, и $Y \mapsto X$. Приметимо да је уочени хомоморфизам на, па је $R[X] \cong S[Y]/\ker(\phi)$ Нетерин. Коначно и R је Нетерин. $\square$

2. Нека је D интегрално затворен домен са пољем разломака k. Нека су $f(X), g(X) \in k[X]$ монични полиноми такви да $f(X)g(X) \in D[X]$. Доказати да $f(X), g(X) \in D[X]$.

Решење. Како је $f(X)g(X)$ моничан полином са коефицијентима у D, то су сви његови корени (из k^a) интегрални над D, тј. сви корени од f и сви корени од g су интегрални над D. Како су коефицијенти полинома f, односно g, алгебраске комбинације његових корена, то су и они интегрални над D. Међутим како ти коефицијенти припадају k, а D је интегрално затворен у k, закључујемо да коефицијенти морају припадати D. $\square$

3. Нека је $S = \{(2,0)^n \mid n \geqslant 0\} = \{(1,1), (2,0), (4,0), (8,0), \ldots\}$ мултипликативно затворен подскуп од $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Доказати да је $S^{-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$.

Решење. Изоморфизам је дат са: $(a,b)/(2,0)^n \mapsto a/2^n$. $\square$

4. Изарачунати радикал идела $I = \langle X^2(Y-Z), XY(Y-Z), XZ(Y-Z)^2 \rangle$ у $\mathbb{C}[X,Y,Z]$.

Решење. Користећи Хилбертов нулштелензац, лако се види да је $\sqrt{I} = \langle X(Y-Z) \rangle$. $\square$

5. Нека је $F = k(D)$ раширење поља k (не обавезно коначно) такво да $|k(\alpha) : k| = 2$, за све $\alpha \in D$. Доказати да је F/k нормално.

Решење. Лако видимо да је F коренско поље фамилије $\mathcal{F} = \{\mu_{\alpha,\mathbb{Q}}(X) \mid \alpha \in D\}$. $\square$

6. Нека су α, β алгебарски над пољем k позитивне карактеристике. Ако је α сепарабилан над k, а β чисто инсепарабилан, доказати да је $k(\alpha, \beta) = k(\alpha + \beta)$.

Решење. Јасно је да је $k(\alpha+\beta) \subseteq k(\alpha, \beta)$. Како је β чисто инсепарабилан над k, то је $\beta^{p^n} \in k$ за неко n, где је p карактеристика поља. Тада $(\alpha+\beta)^{p^n} = \alpha^{p^n} + \beta^{p^n} \in k(\alpha+\beta)$, па и $\alpha^{p^n} \in k(\alpha+\beta)$. Дакле, α поништава полином $X^{p^n} - \alpha^{p^n} = (X-\alpha)^{p^n}$ над $k(\alpha+\beta)$, па $\mu_{\alpha,k(\alpha+\beta)}(X) \mid (X-\alpha)^{p_n}$. Међутим, како је α сепрабилан над k, па самим тим и над $k(\alpha+\beta)$, закључујемо да $\mu_{\alpha,k(\alpha+\beta)}(X) = X - \alpha$. Другим речима $\alpha \in k(\alpha+\beta)$, одакле и $\beta \in k(\alpha+\beta)$. Коначно, $k(\alpha+\beta) = k(\alpha,\beta)$. $\square$

7. Израчунати Галоаову групу коренског поља полинома $f(X) = X^6 - 4X^3 + 1$ над $\mathbb{Q}$. Одредити фиксно поље неке подгрупе реда 3.

Решење. Дати полином је несводљив над $\mathbb{Q}$ (можете применити Ајзенштајнов критеријум на $f(X-1)$). Уводећи смену $X^3 = Y$, добијамо квадратну једначину $Y^2 - 4Y + 1$, чија су решења $2 \pm \sqrt{3}$. Ако са α означимо $\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$, и ако приметимо да је $\sqrt[3]{2-\sqrt{3}} = 1/\alpha$, имамо да су корени датог полинома: $\alpha, \varepsilon_3\alpha, \varepsilon_3^2\alpha, 1/\alpha, \varepsilon_3/\alpha, \varepsilon_3^2/\alpha$. Дакле, коренско поље је $F = \mathbb{Q}(\alpha, \epsilon_3) = \mathbb{Q}(\alpha, i\sqrt{3})$. Ако приметимо да је $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\alpha)$, добијамо да је $F = \mathbb{Q}(\alpha, i)$.

Степен раширења добијамо ланчаним правилом на $\mathbb{Q} \leqslant \mathbb{Q}(\alpha) \leqslant \mathbb{Q}(\alpha, i)$ и једнак је $|F : \mathbb{Q}| = 12$. Елементарним рачуном долазимо до података у следећој табели (имајте на уму да је $\sqrt{3} = \alpha^3 - 2$, а $-\sqrt{3} = 1/\alpha^3 - 2$):

	α	i	$\sqrt{3}$	ε_3	ред
f_1	α	i	$\sqrt{3}$	ε_3	1
f_2	$\varepsilon_3\alpha$	i	$\sqrt{3}$	ε_3	3
f_3	$\varepsilon_3^2\alpha$	i	$\sqrt{3}$	ε_3	3
f_4	$1/\alpha$	i	$-\sqrt{3}$	ε_3^2	2
f_5	ε_3/α	i	$-\sqrt{3}$	ε_3^2	6
f_6	ε_3^2/α	i	$-\sqrt{3}$	ε_3^2	6
g_1	α	$-i$	$\sqrt{3}$	ε_3^2	2
g_2	$\varepsilon_3\alpha$	$-i$	$\sqrt{3}$	ε_3^2	2
g_3	$\varepsilon_3^2\alpha$	$-i$	$\sqrt{3}$	ε_3^2	2
g_4	$1/\alpha$	$-i$	$-\sqrt{3}$	ε_3	2
g_5	ε_3/α	$-i$	$-\sqrt{3}$	ε_3	2
g_6	ε_3^2/α	$-i$	$-\sqrt{3}$	ε_3	2

Лако се сада може закључити да је $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{D}_6$, а такође се види да је тражено фиксно поље једнако $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$. □

8. (а) За фиксирани ненула $\boldsymbol{\omega} \in \Lambda^k K^n$, $k < n$, посматрајмо K-линеарно пресликавање:

$$f : K^n \longrightarrow \Lambda^{k+1} K^n,\ \nu \mapsto \nu \wedge \boldsymbol{\omega}.$$

Доказати да је $\mathrm{rk} f \geqslant n - k$, и једнокост важи акко $\boldsymbol{\omega} = \nu_1 \wedge \ldots \wedge \nu_k$ за неке $\nu_1, \ldots, \nu_k \in K^n$.

(б) Дефинисати Plücker-ово утапање Грасманијана $G(k, n)$ и доказати да су Грасманијани пројективни варијетети.