

1. На скупу $G = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^0$ ($\mathbb{Q}^0 = \mathbb{Q} - \{0\}$) дате су операције:

$$\begin{aligned}(m, n) \circ (a, b) &= (m + n + a, b), \\ (m, n) \star (a, b) &= (m + n + na, nb).\end{aligned}$$

- (а) Показати да (G, \circ) није, а да (G, \star) јесте група. Испитати да ли су операције \circ и \star комутативне.
 (б) Нека су $H = \{(m, -1) \mid m \in \mathbb{Q}\}$, $K = \{(m, 1) \mid m \in \mathbb{Q}\}$, $L = \{(-1, n) \mid n \in \mathbb{Q}^0\}$. Испитати да ли су H , K , L , $H \cup K$ и $K \cup L$ подгрупе групе (G, \star) .
 (в) Испитати да ли су пресликавања f и g , дата са $f((m, n)) = (-1, n)$ и $g((m, n)) = (m, 1)$, ендоморфизми групе (G, \star) .

2. Дата је матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$ и подгрупа $H = \langle A \rangle$ од $GL_2(\mathbb{R})$.

- (а) Израчунати $r(A)$. Написати све елементе групе $\langle A^3 \rangle$.
 (б) Ако је a генератор цикличне групе C_{15} , реда 15, израчунати $r(a^{12})$.
 (в) Написати све подгрупе групе $C_{15} = \langle a \rangle$.
 (г) Испитати да ли је $H \times C_{15}$ циклична.

1. На скупу $G = \mathbb{Q}^0 \times \mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}^0 = \mathbb{Q} - \{0\}$) дате су операције:

$$\begin{aligned}(m, n) \circ (a, b) &= (m, n + a + b), \\ (m, n) \star (a, b) &= (ma, na + a + b).\end{aligned}$$

- (а) Показати да (G, \circ) није, а да (G, \star) јесте група. Испитати да ли су операције \circ и \star комутативне.
 (б) Нека су $H = \{(m, -1) \mid m \in \mathbb{Q}^0\}$, $K = \{(-1, n) \mid n \in \mathbb{Q}\}$, $L = \{(1, n) \mid n \in \mathbb{Q}\}$. Испитати да ли су H , K , L , $H \cup K$ и $K \cup L$ подгрупе групе (G, \star) .
 (в) Испитати да ли су пресликавања f и g , дата са $f((m, n)) = (1, n)$ и $g((m, n)) = (m, -1)$, ендоморфизми групе (G, \star) .

2. Дата је матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$ и подгрупа $H = \langle A \rangle$ од $GL_2(\mathbb{C})$.

- (а) Израчунати $r(A)$. Написати све елементе групе $\langle A^3 \rangle$.
 (б) Ако је a генератор цикличне групе C_{15} , реда 15, израчунати $r(a^9)$.
 (в) Написати све подгрупе групе $C_{15} = \langle a \rangle$.
 (г) Испитати да ли је $H \times C_{15}$ циклична.