Алгебра 2007/08., други колоквијум *16. јун 2008.*

1 Да ли једначина $4x - 6y = c$ има решење за: **(а)** $c = 3$; **(б)** $c = 4$? Ако је одговор позитиван одредити сва решења дате једначине.

Решење: **(а)** Како $(4, 6) = 2 \nmid 3$, то једначина $4x - 6y = 3$ нема целобројна решења.

(б) Како $(4, 6) = 2 \mid 4$, једначина $4x - 6y = 4$ има целобројна решења. Очигледно $(x_0, y_0) = (1, 0)$ јесте једно решење дате једначине, тј. $4x_0 - 6y_0 = 4$. Одузимањем ове две једначине имамо $4(x - x_0) - 6(y - y_0) = 0$, тј. $4(x - 1) = 6y$ или $2(x - 1) = 3y$. Одатле је $x = 1 + 3t$, $y = 2s$, и стављањем у полазну једначину добијамо $4 + 12t - 12s = 4$, тј. добијамо $t = s$. Дакле, сва решења дате једначине су $(x, y) = (1 + 3t, 2t)$, $t \in \mathbb{Z}$. $\square$

2 Нека је дата група $\mathbb{G} = \mathbb{Z}_{50} \times \mathbb{Z}_{360}$.

(а) Одредити елементарну и нормалну форму групе $\mathbb{G}$.

(б) Одредити број елемената реда 5 у групи $\mathbb{G}$.

(в) Одредити број елемената реда 6 у групи $\mathbb{G}$.

(г) Одредити број елемената максималног реда у групи $\mathbb{G}$.

Решење: **(а)** $\mathbb{G} = \mathbb{Z}_{50} \times \mathbb{Z}_{360} = \mathbb{Z}_{2\cdot 5^2} \times \mathbb{Z}_{2^3 . 3^2 . 5} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2^3} \times \mathbb{Z}_{3^2} \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{5^2}$, што је елементарна форма, а нормална форма је одатле $\mathbb{G} = \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{1800}$.

(б) Посматрајмо елементарну форму, и нека је (a, b, c, d, e) елемент из $\mathbb{G}$. Тада је $r(a, b, c, d, e) = [r(a), r(b), r(c), r(d), r(e)]$ и $r(a) \in \{1, 2\}$, $r(b) \in \{1, 2, 4, 8\}$, $r(c) \in \{1, 3, 9\}$, $r(d) \in \{1, 5\}$, $r(e) \in \{1, 5, 25\}$. Из услова $r(a, b, c, d, e) = 5$ добијамо три могућности: $r(a) = r(b) = r(c) = 1$, $r(d) = 1$, $r(e) = 5$ или $r(a) = r(b) = r(c) = 1$, $r(d) = 5$, $r(e) = 1$ или $r(a) = r(b) = r(c) = 1$, $r(d) = 5$, $r(e) = 5$. Одатле број елемената реда 5 је $\varphi(1)\varphi(1)\varphi(1)\varphi(1)\varphi(5) + \varphi(1)\varphi(1)\varphi(1)\varphi(5)\varphi(1) + \varphi(1)\varphi(1)\varphi(1)\varphi(5)\varphi(5) = 4 + 4 + 4 \cdot 4 = 24$.

(в) Из услова $r(a, b, c, d, e) = 5$ добијамо три могућности: $r(a) = 1$, $r(b) = 2$, $r(c) = 3$, $r(d) = r(e) = 1$ или $r(a) = 2$, $r(b) = 1$, $r(c) = 3$, $r(d) = r(e) = 1$ или $r(a) = 2$, $r(b) = 2$, $r(c) = 3$, $r(d) = r(e) = 1$. Одатле број елемената реда 6 је $\varphi(1)\varphi(2)\varphi(3)\varphi(1)\varphi(1) + \varphi(2)\varphi(1)\varphi(3)\varphi(1)\varphi(1) + \varphi(2)\varphi(2)\varphi(3)\varphi(1)\varphi(1) = 2 + 2 + 2 = 6$.

(г) Из нормалне форме видимо да је максимални ред елемента 1800 у групи $\mathbb{G}$, а такође из нормалне форме видимо да њих има $10 \cdot \varphi(1800) = 10 \cdot \varphi(2^3)\varphi(3^2)\varphi(5^2) = 10 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 20 = 4800$. $\square$

3 Показати да група $\mathbb{G}$ реда 216 није проста.

Решење: $|\mathbb{G}| = 216 = 2^3 \cdot 3^3$. Нека је H S_3-подгрупа у групи $\mathbb{G}$, која постоји према првој теореми Силова. Њен ред је $|H| = 27$, тј. индекс је $|\mathbb{G} : H| = 8$. Посматрајмо подгрупу $CoreH$. За њу важи $CoreH \lhd \mathbb{G}$. Како $CoreH < H \lneqq \mathbb{G}$, то $CoreH \neq \mathbb{G}$. Ако претпоставимо да је $CoreH =< e >$ добијамо према $n!$ теореми да $|\mathbb{G} : CoreH| \mid |\mathbb{G} : H|!$, тј. да $216|8!$, што није тачно. Дакле, $CoreH \neq< e >$. Одатле је $CoreH$ права, нетривијална, нормална подгрупа у групи $\mathbb{G}$, те $\mathbb{G}$ не може бити проста. $\square$

4 Нека је $\alpha = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

(а) Наћи $min(\alpha, \mathbb{Q})$ и одредити $|\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}|$.

(б) Дати једну базу за $\mathbb{Q}(\alpha)$ над $\mathbb{Q}$.

(в) Представити елемент $\frac{1}{\alpha - 1}$ у уоченој бази.

Решење: **(а)** Из $\alpha^2 = 2 + \sqrt{2}$ следи $\alpha^4 - 4\alpha^2 + 4 = 2$, тј. α анулира полином $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$, који је несводљив по Ајзенштајновом критеријуму над $\mathbb{Z}$ за прост број 2, па по Гаусовој леми и над $\mathbb{Q}$, те је он тражени минималан. Даље следи $|\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}| = deg f(x) = 4$.

(б) $\mathbb{Q}(\alpha)$ је четвородимензиони векторски простор над $\mathbb{Q}$, и због минималности полинома $f(x)$ једна база је $\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\}$.

(в) Нека је $g(x) = x - 1$. Имамо $f(x) = g(x)(x^3 + x^2 - 3x - 3) - 1$, па је $1 = f(\alpha) + 1 = g(\alpha)(\alpha^3 + \alpha^2 - 3\alpha - 3)$. Одатле је $\frac{1}{\alpha-1} = \frac{1}{g(\alpha)} = \alpha^3 + \alpha^2 - 3\alpha - 3$ тражени елемент у уоченој бази. $\square$

5 **(а)** Дефинисати појам идеала у прстену P.

(б) Ако је I идеал прстена P дефинисати количнички прстен P/I.

(в) Дефинисати проста раширења поља F.

(г) Дефинисати алгебарске и трансцендентне елементе поља K над пољем F.