Algebra, I smer, 14. jun 2011.

1. a) Neka je $\sigma \in \mathbb{S}_9$ permutacija zadata sa: $\sigma = (132)(38475)(2938)$. Zapisati permutaciju u obliku proizvoda disjunktnih ciklusa i odrediti njen red.

   b) Ispitati da li u grupi $\mathbb{S}_{11}$ postoji element reda 21 i ako postoji, odrediti bar jedan takav element.

2. Odrediti normalnu formu aditivne komutativne grupe G zadate generatorima a, b, c, d i sistemom relacija:

$$-12a + 18b - 18c + 3d = 0,$$
$$15b - 27c + 6d = 0,$$
$$-6a + 3b + 3c - 9d = 0,$$
$$6b + 15d = 0.$$

   Koji je maksimalni red elementa u grupi G? Koliko ima elemenata maksimalnog reda?

3. Rešiti sistem kongruencija:

$$x \equiv 3 \pmod 8, \qquad x \equiv 16 \pmod{25}, \qquad x \equiv 1 \pmod 3.$$

4. Neka su m i n prirodni brojevi takvi da $n|m$. Dokažite da je prirodna surjekcija $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ takođe surjektivna i na jedinicama (invertibilnim elementima) tj. da je homomorfizam (grupa)

$$U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \to U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

   takođe surjektivan („na“).

5. Odredite korensko polje K polinoma $f(X) = X^4 - 13X^2 + 22$. Odredite jedan element $\alpha \in \mathbb{C}$ takav da je $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ i odredite minimalni polinom tog elementa α nad $\mathbb{Q}$. Napišite $\frac{1}{\alpha+5}$ u obliku $p(\alpha)$ za neki polinom $p(X) \in \mathbb{Q}[X]$.

6. (Bonus teorijsko pitanje) Ideali i količnički prsteni.

Algebra, I smer, 14. jun 2011.

1. a) Neka je $\sigma \in \mathbb{S}_9$ permutacija zadata sa: $\sigma = (132)(38475)(2938)$. Zapisati permutaciju u obliku proizvoda disjunktnih ciklusa i odrediti njen red.

   b) Ispitati da li u grupi $\mathbb{S}_{11}$ postoji element reda 21 i ako postoji, odrediti bar jedan takav element.

2. Odrediti normalnu formu aditivne komutativne grupe G zadate generatorima a, b, c, d i sistemom relacija:

$$-12a + 18b - 18c + 3d = 0,$$
$$15b - 27c + 6d = 0,$$
$$-6a + 3b + 3c - 9d = 0,$$
$$6b + 15d = 0.$$

   Koji je maksimalni red elementa u grupi G? Koliko ima elemenata maksimalnog reda?

3. Rešiti sistem kongruencija:

$$x \equiv 3 \pmod 8, \qquad x \equiv 16 \pmod{25}, \qquad x \equiv 1 \pmod 3.$$

4. Neka su m i n prirodni brojevi takvi da $n|m$. Dokažite da je prirodna surjekcija $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ takođe surjektivna i na jedinicama (invertibilnim elementima) tj. da je homomorfizam (grupa)

$$U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \to U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

   takođe surjektivan („na“).

5. Odredite korensko polje K polinoma $f(X) = X^4 - 13X^2 + 22$. Odredite jedan element $\alpha \in \mathbb{C}$ takav da je $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ i odredite minimalni polinom tog elementa α nad $\mathbb{Q}$. Napišite $\frac{1}{\alpha+5}$ u obliku $p(\alpha)$ za neki polinom $p(X) \in \mathbb{Q}[X]$.

6. (Bonus teorijsko pitanje) Ideali i količnički prsteni.