

## Алгебра, II смер, 21. јун 2015.

1. а) [8] Доказати да је  $G = \left\{ \frac{1+2m}{1+2n} : m, n \in \mathbb{Z} \right\}$  група у односу на множење рационалних бројева.

б) [4] Доказати да је пресликавање  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^*$ , задато са  $f(x) = \cos x + i \sin x$ , хомоморфизам адитивне групе  $\mathbb{R}$  у мултипликативну групу  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

2. [10] Нека су  $H$  и  $K$  коначне подгрупе групе  $G$  и нека су редови тих подгрупа узајамно прости природни бројеви. Доказати да је  $H \cap K = \{e\}$  ( $e$  је неутрал групе  $G$ ).

3. Дате су пермутације  $\pi: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 1 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$  и  $\sigma = (73428)(43)(46)$  (из  $\mathbb{S}_8$ ).

а) [6] Пермутације  $\pi$ ,  $\sigma$  и  $\sigma^{-1}\pi$  представити као производ дисјунктних циклуса, одредити им ред и знак.

б) [4] Одредити  $\pi^{2014}$ ,  $\sigma^{2015}$  и  $(\sigma^{-1}\pi)^{2016}$ .

в) [5] Одредити максималан ред елемента у групи  $\mathbb{S}_8$ .

4. Нека је  $G$  комутативна група задате генераторима  $x_1, x_2, x_3$  и релацијама

$$\begin{aligned} -6x_1 + 10x_2 - 14x_3 &= 0 \\ -12x_1 + 18x_2 - 30x_3 &= 0 \\ 6x_1 - 12x_2 + 18x_3 &= 0. \end{aligned}$$

а) [9] Наћи нормалну и елементарну форму групе  $G$ .

б) [6] Који је максималан ред елемента у овој групи? Колико елемената ове групе је реда 6?

5. а) [4] Одредити примитивни корен по модулу 17.

б) [8] Коришћењем дела под а), у скупу целих бројева решити следеће конгруенције

$$x^5 \equiv 3 \pmod{17} \quad x^6 \equiv 10 \pmod{17} \quad x^{10} \equiv 13 \pmod{17}.$$

6. [16] Одредите коренско поље  $K$  полинома  $f(X) = X^4 - 2X^2 - 15$ . Одредите неки елемент  $\alpha \in \mathbb{C}$  такав да је  $K = \mathbb{Q}(\alpha)$  и одредите минимални полином тог елемента  $\alpha$  над  $\mathbb{Q}$ . Напишите  $\frac{1}{\alpha^2+1}$  у облику  $p(\alpha)$  за неки полином  $p(X) \in \mathbb{Q}[X]$ .