Алгебра, октобар 2009. *18. септембар 2009.*

1.1. На скупу $G = \mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}$ $\left[\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}\right]$ задата је операција $\star$ са: $(a,b) \star (x,y) = (ax, a^2y + b)$.

(а) Показати да је $(G, \star)$ група. Да ли је ова група Абелова?

(б) Испитати да ли су $H = \{(a,0) \mid a \in \mathbb{R}_0\}$, $K = \{(1,b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ и $H \cup K$ подгрупе групе G.

(в) Испитати да ли су пресликавања f, $g : G \to G$, задата са $f(a,b) = (1,b)$ и $g(a,b) = (a,0)$ хомоморфизми група. Ако јесу, одредити им језгро и слику.

1.2. Нека је a генератор цикличне групе C_{30}.

(а) Одредити све генераторе групе C_{30}.

(б) Одредити редове елемената a^4, a^9 и a^{12}.

(в) Одредити све подгрупе групе C_{30}.

2.1. (а) Нека је $a \in G$ елемент реда n и k такав да важи $(k,n) = 1$. Доказати да једначина $x^k = a$ има бар једно решење у G.

(б) Нека је $a \in G$ једини елемент реда 2. Доказати да је G комутативна.

2.2. Одредити остатак при дељењу броја 1801^{1985} са 60.

2.3. Дате су пермутације $f = (1\,5\,2\,4\,7)(3\,6)(2\,3\,4\,7)(1\,7\,3\,4\,6)$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 6 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in S_7$, $\alpha = fg$, $\beta = gf$. Наћи њихову циклусну декомпозицију, ред и парност и одредити, ако постоји, пермутацију h тако да је $\beta = h^{-1}\alpha h$.

3.1. Абелова група G је дата генераторима a, b, c за које важе релације:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 9\,a & + & 4\,b & - & 5\,c & = & 0 \\ 4\,a & + & 2\,b & - & 4\,c & = & 0 \\ -14\,a & - & 6\,b & + & 186\,c & = & 0. \end{array}$$

Одредити елементарну и нормалну форму групе G и број елемената реда 4, 9 и максималног реда.

3.2. Нека је $\mathbb{R}[x]$ прстен полинома са реалним коефицијентима, $I = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p(0) = 0\}$ и $P = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p'(0) = 0\}$.

(а) Испитати да ли су I, P потпрстени од $\mathbb{R}[x]$.

(б) Испитати да ли су I, P идеали од $\mathbb{R}[x]$.

(в) Да ли су уочени идеали прости? Максимални?

3.3. Нека је $\alpha = \sqrt{3 + \sqrt{3}}$. Одредити $|\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}|$, дати једну базу за $\mathbb{Q}(\alpha)$ над $\mathbb{Q}$ и у уоченој базу представити елемент $\dfrac{1}{\alpha^2 - 6}$.

3.4. Дат је полином $f(x) = x^3 + x^2 + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$.

(а) Показати да је $f(x)$ несводљив над $\mathbb{Z}_3$.

(б) Колико елемената има у пољу $(\mathbb{Z}_3[x])_f$?

(в) Израчунати инверз елемента $x^2 + x$ у пољу $(\mathbb{Z}_3[x])_f$.