Дискретне структуре 1, први колоквијум 2007/08.
17. новембар 2007.

1 Нека су A, B, C произвољни скупови.
(а) Прављењем истинитосне таблице показати скуповни идентитет $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$.
(б) Методом карактеристичних функција показати скуповни идентитет $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

Решење: (а) Датом скуповном идентитету придружујемо исказну формулу $a \vee (b \wedge \neg c) \Leftrightarrow (a \vee b) \wedge \neg(c \wedge \neg a)$. Таблицом показујемо да је исказ таутологија, што је еквивалентно чињеници да важи идентитет.

a	b	c	a	$\vee$	$(b$	$\wedge$	$\neg c)$	$\Leftrightarrow$	$(a$	$\vee$	$b)$	$\wedge$	$\neg$	$(c$	$\wedge$	$\neg a)$
$\top$	$\top$	$\top$		$\top$		$\bot$	$\bot$	$\top$		$\top$		$\top$	$\top$		$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$		$\top$		$\top$	$\top$	$\top$		$\top$		$\top$	$\top$		$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$		$\top$		$\bot$	$\bot$	$\top$		$\top$		$\top$	$\top$		$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$		$\top$		$\bot$	$\top$	$\top$		$\top$		$\top$	$\top$		$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$		$\bot$		$\bot$	$\bot$	$\top$		$\top$		$\bot$	$\bot$		$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$		$\top$		$\top$	$\top$	$\top$		$\top$		$\top$	$\top$		$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$		$\bot$		$\bot$	$\bot$	$\top$		$\bot$		$\bot$	$\bot$		$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$		$\bot$		$\bot$	$\top$	$\top$		$\bot$		$\bot$	$\top$		$\bot$	$\top$

(б) Рачунамо:
$\chi_{A\cap(B\setminus C)} = \chi_A\chi_{B\setminus C} = \chi_A(\chi_B - \chi_B\chi_C) = \chi_A\chi_B - \chi_A\chi_B\chi_C$,
$\chi_{(A\cap B)\setminus(A\cap C)} = \chi_{A\cap B} - \chi_{A\cap B}\chi_{A\cap C} = \chi_A\chi_B - \chi_A\chi_B\chi_A\chi_C = \chi_A\chi_B - \chi_A\chi_B\chi_C$,
одакле важи скуповни идентител јер су карактеристичне функције леве и десне стране једнаке. $\square$

2 **(а)** Показати да за $n \geq 1$ важи $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$.
(б) Ако је f_n низ Фибоначијевих бројева ($f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2},\ n \geq 2$), показати да за $n \geq 0$ важи $f_0 + f_1 + f_2 + ... + f_n = f_{n+2} - 1$.

Решење: (а) Доказујемо математичком индукцијом:
$\underline{n=1}$: Очигледно важи јер је $1 = 1^2$.
$\underline{n \Rightarrow n+1}$: Претпоставимо да је $1+3+5+...+(2n-1) = n^2$, и показујемо $1+3+5+...+(2n-1)+(2n+1) = (n+1)^2$. Имамо $1+3+5+...+(2n-1)+(2n+1) = (1+3+5+...+(2n-1)) + (2n+1) = n^2+2n+1 = (n+1)^2$.
(б) Доказујемо математичком индукцијом:
$\underline{n=0}$: $f_0 = 0 = 1-1 = f_2 - 1$.
$\underline{n \Rightarrow n+1}$: Претпоставимо да је $f_0 + f_1 + ... + f_n = f_{n+2} - 1$, и покаујемо $f_0 + f_1 + ... + f_n + f_{n+1} = f_{n+3} - 1$. Имамо $f_0 + f_1 + ... + f_n + f_{n+1} = (f_0 + f_1 + ... + f_n) + f_{n+1} = f_{n+2} - 1 + f_{n+1} = (f_{n+1} + f_{n+2}) - 1 = f_{n+3} - 1$. $\square$

3 Нека је на скупу $A = \{-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ дата релација ρ са $x\rho y \ \Leftrightarrow\ 11 \mid x + 10y$. Показати да је ρ релација еквиваленције и одредити класе еквиваленције.

Решење: (Р) $11 \mid x + 10x = 11x$, одакле следи $x\rho x$, за свако x.
(С) Ако $x\rho y$, то $11 \mid x + 10y$. Како је $y + 10x = 11(x+y) - (x+10y)$, то $11 \mid y + 10x$, тј. $y\rho x$.
(Т) Ако $x\rho y$ и $y\rho z$, тада $11 \mid x+10y$ и $11 \mid y + 10z$. Како је $x + 10z = (x+10y) + (y+10z) - 11y$, то $11 \mid x + 10z$, тј $x\rho z$.
Дакле, релација јесте еквиваленција. Нађимо класе еквиваленције. $y \in C_x$ ако и само ако $y\rho x$, а то је ако и само ако $11 \mid y + 10x$. Међутим, последње је ако и само ако $11 \mid (y+10x) - 11x = y - x$, тј. ако и само ако $y - x = 11k$. Дакле $C_x = \{x + 11k\ :\ x + 11k \in A\}$. Следи, $C_{-1} = C_{10} = \{-1,\ 10\}$, $C_0 = \{0\}$, $C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{2\}$, $C_3 = \{3\}$, $C_4 = \{4\}$, $C_5 = \{5\}$, $C_6 = \{6\}$, $C_7 = \{7\}$, $C_8 = \{8\}$, $C_9 = \{9\}$. $\square$

4 **(а)** Показати да у исказном рачуну важи $\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B$.
(б) Представити исказну формулу $\neg(p \Rightarrow (q \wedge r))$ у КДНФ.

Решење: (а) Како је $A \vee B$ замена за $\neg A \Rightarrow B$ и $A \wedge B$ замена за $\neg(A \Rightarrow \neg B)$, то треба показати $\neg(\neg A \Rightarrow B) \vdash \neg(\neg A \Rightarrow \neg\neg B)$.

Најпре покажимо $\neg A \Rightarrow \neg\neg B \vdash \neg A \Rightarrow B$. Изводимо:

(1)	хипотеза	$\neg A \Rightarrow \neg\neg B$
(2)	Л4(а)	$\neg\neg B \Rightarrow B$
(3)	Л2(1,3)	$\neg A \Rightarrow B$

Дакле, $\neg A \Rightarrow \neg\neg B \vdash \neg A \Rightarrow B$, одакле је према ставу дедукције $\vdash (\neg A \Rightarrow \neg\neg B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$.

Изводимо даље $\neg(\neg A \Rightarrow B) \vdash \neg(\neg A \Rightarrow \neg\neg B)$:

(1)	теорема	$(\neg A \Rightarrow \neg\neg B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$
(2)	Л4(в)	$((\neg A \Rightarrow \neg\neg B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)) \Rightarrow (\neg(\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg(\neg A \Rightarrow \neg\neg B))$
(3)	МП(1,2)	$\neg(\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg(\neg A \Rightarrow \neg\neg B)$
(4)	хипотеза	$\neg(\neg A \Rightarrow B)$
(5)	МП(3,4)	$\neg(\neg A \Rightarrow \neg\neg B)$

Дакле, важи тврђење.

(б) Правимо таблицу за дату исказну формулу:

p	q	r	$\neg$	$(p$	$\Rightarrow$	$(q$	$\wedge$	$r))$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$		$\top$		$\top$	
$\top$	$\top$	$\bot$	$\boxed{\top}$		$\bot$		$\bot$	
$\top$	$\bot$	$\top$	$\boxed{\top}$		$\bot$		$\bot$	
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\boxed{\top}$		$\bot$		$\bot$	
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$		$\top$		$\top$	
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$		$\top$		$\bot$	
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$		$\top$		$\bot$	
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$		$\top$		$\bot$	

Из таблице видимо да је КДНФ дате форлуме $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$. $\square$

5 (Теоријско питање)
(а) Навести аксиоме исказног рачуна и навести и доказати две леме по избору.
(б) Теорема потпуности.
(в) Став дедукције.

Славко Моцоња
slavkomm@gmail.com
http://www.matf.bg.ac.yu/~slavko