1 Методом карактеристичних функција показати скуповни идентитет: $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

Решење: Из $\chi_{A\setminus(B\setminus C)} = \chi_A - \chi_A\chi_{B\setminus C} = \chi_A - \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_B\chi_C$ и $\chi_{(A\setminus B)\cup(A\cap C)} = \chi_{A\setminus B} + \chi_{A\cap C} - \chi_{A\setminus B}\chi_{A\cap C} = \chi_A - \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C - \chi_A\chi_A\chi_A\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_A\chi_C = \chi_A - \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_B\chi_C$ закључујемо идентитет. $\square$

2 Показати да је релација $\rho \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, дата са $x\rho y$ ако и само ако $7 \mid 2x + 5y$, релација еквиваленције и наћи класе еквиваленције.

Решење: Приметимо $7 \mid 2x + 5y$ ако и само ако $7 \mid 2x + 5y - 7y = 2(x - y)$ ако и само ако $7 \mid x - y$.

(Р) Како $7 \mid x - x = 0$, то за свако x важи $x\rho x$;

(С) Нека $x\rho y$, тада $7 \mid x - y$, али и $7 \mid y - x = -(x - y)$, па $y\rho x$;

(Т) Нека $x\rho y$ и $y\rho z$, тада $7 \mid x - y$, $y - z$, али и $7 \mid x - z = (x - y) + (y - z)$, па $x\rho z$. Дакле, релација јесте еквиваленција.
Класа елемента x је $C_x = \{y \in \mathbb{N} \mid y\rho x\} = \{y \in \mathbb{N} \mid 7 \mid y - x\} = \{y \in \mathbb{N} \mid y - x = 7k,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{y \in \mathbb{N} \mid y = x + 7k,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{x + 7k \in \mathbb{N} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. $\square$

3 Показати да у исказном рачуну важи: $\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B$.

Решење: Како је $A \vee B$ замена за $\neg A \Rightarrow B$ и $A \wedge B$ замена за $\neg(A \Rightarrow \neg B)$, то треба показати $\neg(\neg A \Rightarrow B) \vdash \neg(\neg A \Rightarrow \neg\neg B)$.
Најпре покажимо $\neg A \Rightarrow \neg\neg B \vdash \neg A \Rightarrow B$. Изводимо:

(1)	хипотеза	$\neg A \Rightarrow \neg\neg B$
(2)	Л4(а)	$\neg\neg B \Rightarrow B$
(3)	Л2(1,3)	$\neg A \Rightarrow B$

Дакле, $\neg A \Rightarrow \neg\neg B \vdash \neg A \Rightarrow B$, одакле је према ставу дедукције $\vdash (\neg A \Rightarrow \neg\neg B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$.
Изводимо даље $\neg(\neg A \Rightarrow B) \vdash \neg(\neg A \Rightarrow \neg\neg B)$:

(1)	теорема	$(\neg A \Rightarrow \neg\neg B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$
(2)	Л4(в)	$((\neg A \Rightarrow \neg\neg B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)) \Rightarrow (\neg(\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg(\neg A \Rightarrow \neg\neg B))$
(3)	МП(1,2)	$\neg(\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg(\neg A \Rightarrow \neg\neg B)$
(4)	хипотеза	$\neg(\neg A \Rightarrow B)$
(5)	МП(3,4)	$\neg(\neg A \Rightarrow \neg\neg B)$

Дакле, следи тврђење. $\square$

4 Методом Карноових мапи или Квин-Мекласког минимизовати прекидачко коло дато својом КДНФ: $\overline{ABC}D \vee \overline{AB}CD \vee \overline{AB}C\overline{D} \vee \overline{A}B\overline{C}D \vee \overline{A}BCD \vee \overline{A}BC\overline{D} \vee AB\overline{C}D \vee ABCD \vee ABC\overline{D}$.

Решење: Радимо методу Карноових мапи.

	00	01	11	10
00		1	1	1
01		1	1	1
11		1	1	1
10				

Из мапе читамо да је минимална форма једнака $\overline{A}D \vee \overline{A}C \vee BD \vee BC$. $\square$

5 Наћи контрамодел за формулу: $F \equiv \forall x \forall y \forall z((p(x,y) \wedge p(y,z)) \Rightarrow p(z,x))$.

Решење: Посматрајмо структуру $\mathbb{D} = (\mathbb{N}, I^L)$, $I^L(p) = p_I$ дефинисано са:

$$p_I(a,b) = \top \text{ ако и само ако } a < b;$$

и покажимо $\mathbb{D} \not\models F$. Претпоставимо супротно да за све валуације $v : Var \to \mathbb{N}$ важи $I_v(F) = \top$. Тада за све валуације $v' \sim_x v$ важи $I_{v'}(\forall y \forall z((p(x,y) \wedge p(y,z)) \Rightarrow p(z,x))) = \top$. Узмимо $v'(x) = 0$. Даље, за све валуације $v'' \sim_y v'$ важи $I_{v''}(\forall z((p(x,y) \wedge p(y,z)) \Rightarrow p(z,x))) = \top$. Јасно $v''(x) = v'(x) = 0$ и узмимо $v''(y) = 1$. Даље, за све валуације $v''' \sim_z v''$ важи $I_{v'''}((p(x,y) \wedge p(y,z)) \Rightarrow p(z,x)) = \top$. Јасно, $v'''(x) = x''(x) = 0$, $v'''(y) = v''(y) = 1$ и узмимо $v'''(z) = 2$. Тада добијамо $p_I(0,1) \wedge p_I(1,2) \Rightarrow p_I(2,0) = \top$, тј. $\top \wedge \top \Rightarrow \bot = \top$ или $\top \Rightarrow \bot = \top$. Контрадикција. Следи $\mathbb{D} \not\models F$. $\square$

6 Методом таблоа показати ваљаност формуле: $(\forall x \exists y (p(x,y) \Rightarrow \exists z q(x,z)) \wedge \forall x \forall y p(x,y)) \Rightarrow \forall x \exists z q(x,z)$.

Решење:

$$
\begin{array}{c}
1.\ \mathcal{F}(\forall x \exists y (p(x,y) \Rightarrow \exists z q(x,z)) \wedge \forall x \forall y p(x,y)) \Rightarrow \forall x \exists z q(x,z) \\
2.(1)\ \mathcal{T}\forall x \exists y (p(x,y) \Rightarrow \exists z q(x,z)) \wedge \forall x \forall y p(x,y) \\
3.(1)\ \mathcal{F}\forall x \exists z q(x,z) \\
4^\star.(2)\ \mathcal{T}\forall x \exists y (p(x,y) \Rightarrow \exists z q(x,z)) \\
5^\star.(2)\ \mathcal{T}\forall x \forall y p(x,y) \\
6^\star.(3)\ \mathcal{F}\exists z q(a,z) \\
7.(4)\ \mathcal{T}\exists y (p(a,y) \Rightarrow \exists z q(a,z)) \\
8^\star.(5)\ \mathcal{T}\forall y p(a,y) \\
9.(7)\ \mathcal{T}p(a,b) \Rightarrow \exists z q(a,z) \\
10.(8)\ \mathcal{T}p(a,b) \\
\begin{array}{cc}
/ & \backslash \\
\begin{array}{c} 11.(9)\ \mathcal{F}p(a,b) \\ \times(10{,}11) \\ \\ \\ \end{array} & \begin{array}{c} 12.(9)\ \mathcal{T}\exists z q(a,z) \\ 13.(12)\ \mathcal{T}q(a,c) \\ 14.(6)\ \mathcal{F}q(a,c) \\ \times(13{,}14) \end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

Како су све гране таблоа затворене, то је формула ваљана. $\square$

Славко Моцоња
slavkomm@gmail.com
http://www.matf.bg.ac.yu/~slavko