Дискретне структуре 1 29. јануар 2012.

1. Методом карактеристичних функција доказати скуповни идентитет:
$(A \cup B) \cap ((C \setminus D) \cup B) = ((A \cap C) \setminus D) \cup B$.

2. а) На скупу $A = \{-10, -8, -6, -4, -2, 0, 1, 3, 5, 7, 9\}$ је задата релација поретка са: $x \prec y$ ако је $|x| \leq |y|$. Одредити најмањи и највећи елемент.
б) Нека је скуп $B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ и $C = B \times B$. На скупу C је задата релација еквиваленције са: $(x, y) \sim (s, t)$ ако је $x - 2y = s - 2t$. Одредити класу елемента $(2, -3)$.

3. Нека је $f : X \to Y$ функција и $A \subseteq X, B \subseteq Y$ произвољни скупови. Доказати да је $A \cap f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(f(A) \cap B)$.

4. Нека је $\mathcal{L}$ језик првог реда задат са: $\mathrm{Rel}\mathcal{L} = \{P, Q\}, \mathrm{Fun}\mathcal{L} = \{F, G, H\}, \mathrm{Const}\mathcal{L} = \{c\}$, при чему је $ar(P) = ar(F) = 2$ и $ar(Q) = ar(G) = ar(H) = 1$. Дати језик је интерпретиран на скупу $\mathbb{N}$ тако да $P^{\mathcal{L}}(x, y) = 1$ ако је $x \leq y$, $Q^{\mathcal{L}}(x) = 1$ ако је x прост број, $F^{\mathcal{L}}(x, y) = x + y$, $G^{\mathcal{L}}(x) = 5x$, $H^{\mathcal{L}}(x) = x^2$, $c^{\mathcal{L}} = 3$.
а) Испитати тачност формуле $Q(F(H(x), y) \Rightarrow P(G(x), F(y, c))$ при валуацији $u = \begin{pmatrix} x & y & \cdots \\ 2 & 7 & \cdots \end{pmatrix}$.
б) Одредити валуацију v у којој је формула $\forall y\, P(x, F(y, c)) \Rightarrow P(H(y), G(x))$ тачна.

5. Методом таблоа доказати да је формула $\forall x\, \forall y\, (p(x) \Rightarrow \exists z\, q(y, z)) \Rightarrow \exists x\, (p(x) \Rightarrow \forall y\, \exists z\, q(y, z))$ ваљана.

6. Користећи математичку индукцију доказати да $19 \,|\, 3^{3n+2} + 5 \cdot 2^{3n+1}$ за сваки број $n \in \mathbb{N}$.

7. Наћи све нееквивалентне исказне формуле A, у којима фигуришу искључиво исказна слова p и q, тако да је формула $(A \vee p) \Rightarrow (A \vee \neg q)$ таутологија.

Студенти који полажу други колоквијум раде задатке 1,2,3,4,5, а студенти који полажу испит раде задатке 1,2,5,6,7. Све одговоре детаљно образложити.

Дискретне структуре 1 29. јануар 2012.

1. Методом карактеристичних функција доказати скуповни идентитет:
$(A \cup B) \cap ((C \setminus D) \cup B) = ((A \cap C) \setminus D) \cup B$.

2. а) На скупу $A = \{-10, -8, -6, -4, -2, 0, 1, 3, 5, 7, 9\}$ је задата релација поретка са: $x \prec y$ ако је $|x| \leq |y|$. Одредити најмањи и највећи елемент.
б) Нека је скуп $B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ и $C = B \times B$. На скупу C је задата релација еквиваленције са: $(x, y) \sim (s, t)$ ако је $x - 2y = s - 2t$. Одредити класу елемента $(2, -3)$.

3. Нека је $f : X \to Y$ функција и $A \subseteq X, B \subseteq Y$ произвољни скупови. Доказати да је $A \cap f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(f(A) \cap B)$.

4. Нека је $\mathcal{L}$ језик првог реда задат са: $\mathrm{Rel}\mathcal{L} = \{P, Q\}, \mathrm{Fun}\mathcal{L} = \{F, G, H\}, \mathrm{Const}\mathcal{L} = \{c\}$, при чему је $ar(P) = ar(F) = 2$ и $ar(Q) = ar(G) = ar(H) = 1$. Дати језик је интерпретиран на скупу $\mathbb{N}$ тако да $P^{\mathcal{L}}(x, y) = 1$ ако је $x \leq y$, $Q^{\mathcal{L}}(x) = 1$ ако је x прост број, $F^{\mathcal{L}}(x, y) = x + y$, $G^{\mathcal{L}}(x) = 5x$, $H^{\mathcal{L}}(x) = x^2$, $c^{\mathcal{L}} = 3$.
а) Испитати тачност формуле $Q(F(H(x), y) \Rightarrow P(G(x), F(y, c))$ при валуацији $u = \begin{pmatrix} x & y & \cdots \\ 2 & 7 & \cdots \end{pmatrix}$.
б) Одредити валуацију v у којој је формула $\forall y\, P(x, F(y, c)) \Rightarrow P(H(y), G(x))$ тачна.

5. Методом таблоа доказати да је формула $\forall x\, \forall y\, (p(x) \Rightarrow \exists z\, q(y, z)) \Rightarrow \exists x\, (p(x) \Rightarrow \forall y\, \exists z\, q(y, z))$ ваљана.

6. Користећи математичку индукцију доказати да $19 \,|\, 3^{3n+2} + 5 \cdot 2^{3n+1}$ за сваки број $n \in \mathbb{N}$.

7. Наћи све нееквивалентне исказне формуле A, у којима фигуришу искључиво исказна слова p и q, тако да је формула $(A \vee p) \Rightarrow (A \vee \neg q)$ таутологија.

Студенти који полажу други колоквијум раде задатке 1,2,3,4,5, а студенти који полажу испит раде задатке 1,2,5,6,7. Све одговоре детаљно образложити.