Дискретне структуре 1 7. октобар 2012.

1. Доказати да важи скуповни идентитет: $((A \cap B) \cap C) \setminus D = ((A \setminus D) \cap (B \setminus D)) \cap (C \setminus D)$.

2. а) На скупу $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ је дата релација еквиваленције $\sim$ са: $x \sim y$ ако $x^2 + 2x = y^2 + 2y$. Одредити количнички скуп $A/\sim$.
б) На скупу $B = (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \times \mathbb{N}$ је задата бинарна релација ρ са: $(x, y)\rho(z, t)$ акко $x \mid z$ и $y \leq t$. Доказати да је ово једна релација поретка.

3. Користећи математичку индукцију доказати да за сваки природни број $n \in \mathbb{N}$ важи да $8 \mid 4 \cdot 9^n + 2 \cdot 25^{n+1} + 2$.

4. Нека је $\mathcal{L}$ језик првог реда задат са: $\mathrm{Rel}\mathcal{L} = \{P, Q\}, \mathrm{Fun}\mathcal{L} = \{F, G\}, \mathrm{Const}\mathcal{L} = \{c\}$, при чему је $ar(P) = ar(F) = 2$ и $ar(Q) = ar(G) = 1$. Дати језик је интерпретиран на скупу $\mathbb{Z}$ тако да $P^{\mathcal{L}}(x, y) = 1$ ако је $x|y$, $Q^{\mathcal{L}}(x) = 1$ ако је x позитиван број, $F^{\mathcal{L}}(x, y) = x \cdot y$, $G^{\mathcal{L}}(x) = x + 1$, $c^{\mathcal{L}} = -1$.
а) Испитати тачност формуле $Q(F(c, y)) \Leftrightarrow P(F(x, y), F(G(c), G(y)))$ при валуацији $u = \begin{pmatrix} x & y & \cdots \\ 1 & 2 & \cdots \end{pmatrix}$.
б) Одредити валуацију v у којој је формула $P(G(x), F(x, y)) \Rightarrow \exists x(P(y, x) \Rightarrow P(y, G(x))$ тачна.

5. Методом таблоа доказати да је ваљана формула:

$$(\forall x\, \exists y\, (p(x, y) \Rightarrow \exists z\, q(x, z)) \wedge \forall x\, \forall y\, p(x, y)) \Rightarrow \forall x\, \exists z\, q(x, z).$$

Дискретне структуре 1 7. октобар 2012.

1. Доказати да важи скуповни идентитет: $((A \cap B) \cap C) \setminus D = ((A \setminus D) \cap (B \setminus D)) \cap (C \setminus D)$.

2. а) На скупу $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ је дата релација еквиваленције $\sim$ са: $x \sim y$ ако $x^2 + 2x = y^2 + 2y$. Одредити количнички скуп $A/\sim$.
б) На скупу $B = (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \times \mathbb{N}$ је задата бинарна релација ρ са: $(x, y)\rho(z, t)$ акко $x \mid z$ и $y \leq t$. Доказати да је ово једна релација поретка.

3. Користећи математичку индукцију доказати да за сваки природни број $n \in \mathbb{N}$ важи да $8 \mid 4 \cdot 9^n + 2 \cdot 25^{n+1} + 2$.

4. Нека је $\mathcal{L}$ језик првог реда задат са: $\mathrm{Rel}\mathcal{L} = \{P, Q\}, \mathrm{Fun}\mathcal{L} = \{F, G\}, \mathrm{Const}\mathcal{L} = \{c\}$, при чему је $ar(P) = ar(F) = 2$ и $ar(Q) = ar(G) = 1$. Дати језик је интерпретиран на скупу $\mathbb{Z}$ тако да $P^{\mathcal{L}}(x, y) = 1$ ако је $x|y$, $Q^{\mathcal{L}}(x) = 1$ ако је x позитиван број, $F^{\mathcal{L}}(x, y) = x \cdot y$, $G^{\mathcal{L}}(x) = x + 1$, $c^{\mathcal{L}} = -1$.
а) Испитати тачност формуле $Q(F(c, y)) \Leftrightarrow P(F(x, y), F(G(c), G(y)))$ при валуацији $u = \begin{pmatrix} x & y & \cdots \\ 1 & 2 & \cdots \end{pmatrix}$.
б) Одредити валуацију v у којој је формула $P(G(x), F(x, y)) \Rightarrow \exists x(P(y, x) \Rightarrow P(y, G(x))$ тачна.

5. Методом таблоа доказати да је ваљана формула:

$$(\forall x\, \exists y\, (p(x, y) \Rightarrow \exists z\, q(x, z)) \wedge \forall x\, \forall y\, p(x, y)) \Rightarrow \forall x\, \exists z\, q(x, z).$$