Линеарна алгебра
група 1О3

08.06.2018.

$\boxed{1}$ Израчунати детерминанту

$$\begin{vmatrix} -x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & -x & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & -x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & -x \end{vmatrix}.$$

$\boxed{2}$ Нека је $L : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ дефинисано са

$$L(X) = X^T B - tr(X) \cdot B, \quad \text{где је } B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

а) Доказати да је L линеарни оператор векторског простора $M_2(\mathbb{R})$.

б) Наћи матрицу A линеарног оператора L у односу на канонску базу e простора $M_2(\mathbb{R})$, као и карактеристични и минимални полином оператора L.

в) Одредити сопствене вредности и сопствене векторе оператора L. Наћи бар једну базу f простора $M_2(\mathbb{R})$ у којој L има дијагоналну матрицу D.

$\boxed{3}$ Дато је пресликавање $\circ : \mathbb{R}^4[x] \times \mathbb{R}^4[x] \to \mathbb{R}$ на следећи начин:

$$p \circ q = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p(1)q(1) + p'(1)q'(1).$$

а) Доказати да је $\circ$ скаларни производ на векторском простору $\mathbb{R}^4[x]$.

б) Ако је $U = \{p \in \mathbb{R}^4[x] \mid 2p'(0) + p''(0) = 0, p'''(0) = 0\}$, доказати да је U векторски потпростор простора $\mathbb{R}^4[x]$ и одредити бар једну базу простора $U^\perp$.

в) Одредити ортогоналну пројекцију вектора $v = 1 + x - 3x^2 + 2x^3$ на потпростор U, а затим и угао који вектор v заклапа са потпростором U.

$\boxed{4}$ Нека је $e = [e_1, e_2, e_3]$ ортонормирана база еуклидског векторског простора V и нека је дата квадратна форма Φ на следећи начин:

$$\Phi(v) = x^2 + 2y^2 - 2z^2 + 4xz, \quad v = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

а) Одредити бар једну ортонормирану базу $f = [f_1, f_2, f_3]$ простора V у којој форма Φ има канонски облик.

б) Изразити Φ преко координата x', y', z' у новој бази f.

в) Написати формуле трансформације координата.

Све одговоре детаљно образложити

Линеарна алгебра
група 1О3

08.06.2018.

$\boxed{1}$ Израчунати детерминанту

$$\begin{vmatrix} -x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & -x & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & -x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & -x \end{vmatrix}.$$

$\boxed{2}$ Нека је $L : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ дефинисано са

$$L(X) = X^T B - tr(X) \cdot B, \quad \text{где је } B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

а) Доказати да је L линеарни оператор векторског простора $M_2(\mathbb{R})$.

б) Наћи матрицу A линеарног оператора L у односу на канонску базу e простора $M_2(\mathbb{R})$, као и карактеристични и минимални полином оператора L.

в) Одредити сопствене вредности и сопствене векторе оператора L. Наћи бар једну базу f простора $M_2(\mathbb{R})$ у којој L има дијагоналну матрицу D.

$\boxed{3}$ Дато је пресликавање $\circ : \mathbb{R}^4[x] \times \mathbb{R}^4[x] \to \mathbb{R}$ на следећи начин:

$$p \circ q = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p(1)q(1) + p'(1)q'(1).$$

а) Доказати да је $\circ$ скаларни производ на векторском простору $\mathbb{R}^4[x]$.

б) Ако је $U = \{p \in \mathbb{R}^4[x] \mid 2p'(0) + p''(0) = 0, p'''(0) = 0\}$, доказати да је U векторски потпростор простора $\mathbb{R}^4[x]$ и одредити бар једну базу простора $U^\perp$.

в) Одредити ортогоналну пројекцију вектора $v = 1 + x - 3x^2 + 2x^3$ на потпростор U, а затим и угао који вектор v заклапа са потпростором U.

$\boxed{4}$ Нека је $e = [e_1, e_2, e_3]$ ортонормирана база еуклидског векторског простора V и нека је дата квадратна форма Φ на следећи начин:

$$\Phi(v) = x^2 + 2y^2 - 2z^2 + 4xz, \quad v = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

а) Одредити бар једну ортонормирану базу $f = [f_1, f_2, f_3]$ простора V у којој форма Φ има канонски облик.

б) Изразити Φ преко координата x', y', z' у новој бази f.

в) Написати формуле трансформације координата.

Све одговоре детаљно образложити