Линеарна алгебра
група 1О3

25.06.2018.

1 Доказати да детерминанта реда n

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

има вредност $n+1$.

2 Нека је $L : \mathbb{R}^4[X] \to \mathbb{R}^4[X]$ дефинисано са

$$L(p) = p(x) + x \cdot p(2).$$

а) Доказати да је L линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^4[X]$.

б) Наћи матрицу A линеарног оператора L у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^4[X]$, као и карактеристични и минимални полином оператора L.

в) Одредити сопствене вредности и сопствене векторе оператора L. Наћи бар једну базу f простора $\mathbb{R}^4[X]$ у којој L има дијагоналну матрицу D.

г) Наћи матрицу A^n, $n \in \mathbb{N}$.

3 Дато је пресликавање $\circ : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ на следећи начин:

$$(x_1, x_2, x_3) \circ (y_1, y_2, y_3) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 - x_2y_3 - x_3y_2.$$

а) Доказати да је $\circ$ скаларни производ на векторском простору $\mathbb{R}^3$.

б) Одредити бар једну ортонормирану базу простора $\mathbb{R}^3$ у односу на овај скаларни производ.

в) Ако је U скуп решења једначине $x - 2y + 3z = 0$, одредити ортогоналну пројекцију вектора $v = (0, 1, 4)$ на потпростор U, а затим и растојање тог вектора од потпростора U.

4 Нека је $A \in M_n(\mathbb{R})$ таква да је $A^k = O$ за неко $k \in \mathbb{N}$. Ако је X матрица формата $n \times 1$ на пољем $\mathbb{R}$ таква да је $A^{k-1}X \neq 0$, доказати да је систем $\{X, AX, A^2X, \ldots, A^{k-1}X\}$ линеарно независан.

Све одговоре детаљно образложити

Линеарна алгебра
група 1О3

25.06.2018.

1 Доказати да детерминанта реда n

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

има вредност $n+1$.

2 Нека је $L : \mathbb{R}^4[X] \to \mathbb{R}^4[X]$ дефинисано са

$$L(p) = p(x) + x \cdot p(2).$$

а) Доказати да је L линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^4[X]$.

б) Наћи матрицу A линеарног оператора L у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^4[X]$, као и карактеристични и минимални полином оператора L.

в) Одредити сопствене вредности и сопствене векторе оператора L. Наћи бар једну базу f простора $\mathbb{R}^4[X]$ у којој L има дијагоналну матрицу D.

г) Наћи матрицу A^n, $n \in \mathbb{N}$.

3 Дато је пресликавање $\circ : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ на следећи начин:

$$(x_1, x_2, x_3) \circ (y_1, y_2, y_3) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 - x_2y_3 - x_3y_2.$$

а) Доказати да је $\circ$ скаларни производ на векторском простору $\mathbb{R}^3$.

б) Одредити бар једну ортонормирану базу простора $\mathbb{R}^3$ у односу на овај скаларни производ.

в) Ако је U скуп решења једначине $x - 2y + 3z = 0$, одредити ортогоналну пројекцију вектора $v = (0, 1, 4)$ на потпростор U, а затим и растојање тог вектора од потпростора U.

4 Нека је $A \in M_n(\mathbb{R})$ таква да је $A^k = O$ за неко $k \in \mathbb{N}$. Ако је X матрица формата $n \times 1$ на пољем $\mathbb{R}$ таква да је $A^{k-1}X \neq 0$, доказати да је систем $\{X, AX, A^2X, \ldots, A^{k-1}X\}$ линеарно независан.

Све одговоре детаљно образложити