Линеарна алгебра
група 1О3

17.09.2018.

$\boxed{1}$ Нека је V векторски простор коначне димензије над пољем $\mathbb{R}$ и нека су $L, G : V \to \mathbb{R}$ линеарна пресликавања таква да је $KerL \subseteq KerG$. Доказати да постоји $\alpha \in \mathbb{R}$ тако да је $G = \alpha L$.

$\boxed{2}$ Нека је $L : \mathbb{R}^3[X] \to \mathbb{R}^3[X]$ пресликавање дефинисано са

$$L(a + bX + cX^2) = (-a - 2b + 3c) + (a + 2b + c)X + cX^2.$$

а) Доказати да је L линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3[X]$.

б) Одредити бар једну базу језгра $KerL$ и слике ImL.

в) Наћи матрицу A линеарног оператора L у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^3[X]$, као и карактеристични и минимални полином оператора L.

г) Одредити сопствене вредности и сопствене векторе оператора L.

$\boxed{3}$ Дато је пресликавање $\circ : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ на следећи начин:

$$(x_1, x_2, x_3) \circ (y_1, y_2, y_3) = 2x_1y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

а) Доказати да је $\circ$ скаларни производ на векторском простору $\mathbb{R}^3$.

б) Одредити бар једну ортонормирану базу простора $\mathbb{R}^3$ у односу на дати скаларни производ.

в) Ако је U векторски потпростор простора $\mathbb{R}^3$ генерисан векторима $(1, 0, 0)$ и $(0, 0, 1)$, одредити ортогоналну пројекцију вектора $(1, 1, 1)$ на потпростор U, а затим и растојање вектора v од потпростора U.

$\boxed{4}$ Нека је $e = [e_1, e_2, e_3]$ ортонормирана база еуклидског векторског простора V и нека је дата квадратна форма Φ на следећи начин:

$$\Phi(v) = 2x^2 + 8y^2 + 2z^2 - 8xy + 4xz - 8yz, \quad v = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

а) Одредити бар једну ортонормирану базу $f = [f_1, f_2, f_3]$ простора V у којој форма Φ има канонски облик.

б) Изразити Φ преко координата x', y', z' у новој бази f.

в) Написати формуле трансформације координата.

Све одговоре детаљно образложити

Линеарна алгебра
група 1О3

17.09.2018.

$\boxed{1}$ Нека је V векторски простор коначне димензије над пољем $\mathbb{R}$ и нека су $L, G : V \to \mathbb{R}$ линеарна пресликавања таква да је $KerL \subseteq KerG$. Доказати да постоји $\alpha \in \mathbb{R}$ тако да је $G = \alpha L$.

$\boxed{2}$ Нека је $L : \mathbb{R}^3[X] \to \mathbb{R}^3[X]$ пресликавање дефинисано са

$$L(a + bX + cX^2) = (-a - 2b + 3c) + (a + 2b + c)X + cX^2.$$

а) Доказати да је L линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3[X]$.

б) Одредити бар једну базу језгра $KerL$ и слике ImL.

в) Наћи матрицу A линеарног оператора L у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^3[X]$, као и карактеристични и минимални полином оператора L.

г) Одредити сопствене вредности и сопствене векторе оператора L.

$\boxed{3}$ Дато је пресликавање $\circ : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ на следећи начин:

$$(x_1, x_2, x_3) \circ (y_1, y_2, y_3) = 2x_1y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

а) Доказати да је $\circ$ скаларни производ на векторском простору $\mathbb{R}^3$.

б) Одредити бар једну ортонормирану базу простора $\mathbb{R}^3$ у односу на дати скаларни производ.

в) Ако је U векторски потпростор простора $\mathbb{R}^3$ генерисан векторима $(1, 0, 0)$ и $(0, 0, 1)$, одредити ортогоналну пројекцију вектора $(1, 1, 1)$ на потпростор U, а затим и растојање вектора v од потпростора U.

$\boxed{4}$ Нека је $e = [e_1, e_2, e_3]$ ортонормирана база еуклидског векторског простора V и нека је дата квадратна форма Φ на следећи начин:

$$\Phi(v) = 2x^2 + 8y^2 + 2z^2 - 8xy + 4xz - 8yz, \quad v = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

а) Одредити бар једну ортонормирану базу $f = [f_1, f_2, f_3]$ простора V у којој форма Φ има канонски облик.

б) Изразити Φ преко координата x', y', z' у новој бази f.

в) Написати формуле трансформације координата.

Све одговоре детаљно образложити