Линеарна алгебра А, други ток *24.4.2010.*

А Нека је дата матрица

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 8 \\ -2 & -1 & 4 \\ -2 & -2 & 5 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1° Одредити карактеристични полином $\varphi(\lambda) = det(A - \lambda E)$ и минимални полином μ матрице A.

2° Да ли је матрица A слична некој дијагоналној матрици D на пољем $\mathbb{R}$? У потврдном случају одредити бар једну инверзибилну матрицу P за коју је $D = P^{-1}AP$.

3° Наћи матрицу A^n, $n \in \mathbb{N}$.

4° Одредити све реалне низове x_n, y_n, z_n за које је

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_{n+1} & = & -3x_n & - & 4y_n & + & 8z_n \\ y_{n+1} & = & -2x_n & - & y_n & + & 4z_n \\ z_{n+1} & = & -2x_n & - & 2y_n & + & 5z_n \end{array}$$

ако је $x_0 = 1,\ y_0 = 1,\ z_0 = 1$.

Б Нека је $\mathrm{V} = \mathbb{R}^3[\mathrm{X}]$ и пресликавање $\mathrm{L} : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ дефинисано са

$\mathrm{L(p)} = (2 + 6\mathrm{X})(\mathrm{p}'(1) - \mathrm{p}(0)) + (-2 - 5\mathrm{X} + 2\mathrm{X}^2)\mathrm{p}''(0)$.

1° Доказати да је L један линеарни оператор векторског простора V.

2° Наћи матрицу A линеарног оператора L у односу на канонску базу $e = [1, X, X^2]$ простора V.

3° Одредити неку базу језгра $KerL$ и ранг линеарног оператора L.

4° Одредити матрицу преласка P са базе e на нову базу $f = [f_1, f_2, f_3]$ где је $f_1 = 1 + X,\ f_2 = 1 + 3X,\ f_3 = \frac{1}{2}X + X^2$.

5° Израчунати $B = P^{-1}AP$. Да ли је B и матрица линеарног оператора L у односу на базу f?

В Одредити ранг матрице $\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n+1 \\ 2 & 3 & \dots & n+2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ p & 1+p & \dots & n+p \end{bmatrix}$.

Линеарна алгебра А, други ток *24.4.2010.*

А Нека је дата матрица

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 8 \\ -2 & -1 & 4 \\ -2 & -2 & 5 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1° Одредити карактеристични полином $\varphi(\lambda) = det(A - \lambda E)$ и минимални полином μ матрице A.

2° Да ли је матрица A слична некој дијагоналној матрици D на пољем $\mathbb{R}$? У потврдном случају одредити бар једну инверзибилну матрицу P за коју је $D = P^{-1}AP$.

3° Наћи матрицу A^n, $n \in \mathbb{N}$.

4° Одредити све реалне низове x_n, y_n, z_n за које је

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_{n+1} & = & -3x_n & - & 4y_n & + & 8z_n \\ y_{n+1} & = & -2x_n & - & y_n & + & 4z_n \\ z_{n+1} & = & -2x_n & - & 2y_n & + & 5z_n \end{array}$$

ако је $x_0 = 1,\ y_0 = 1,\ z_0 = 1$.

Б Нека је $\mathrm{V} = \mathbb{R}^3[\mathrm{X}]$ и пресликавање $\mathrm{L} : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ дефинисано са

$\mathrm{L(p)} = (2 + 6\mathrm{X})(\mathrm{p}'(1) - \mathrm{p}(0)) + (-2 - 5\mathrm{X} + 2\mathrm{X}^2)\mathrm{p}''(0)$.

1° Доказати да је L један линеарни оператор векторског простора V.

2° Наћи матрицу A линеарног оператора L у односу на канонску базу $e = [1, X, X^2]$ простора V.

3° Одредити неку базу језгра $KerL$ и ранг линеарног оператора L.

4° Одредити матрицу преласка P са базе e на нову базу $f = [f_1, f_2, f_3]$ где је $f_1 = 1 + X,\ f_2 = 1 + 3X,\ f_3 = \frac{1}{2}X + X^2$.

5° Израчунати $B = P^{-1}AP$. Да ли је B и матрица линеарног оператора L у односу на базу f?

В Одредити ранг матрице $\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n+1 \\ 2 & 3 & \dots & n+2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ p & 1+p & \dots & n+p \end{bmatrix}$.