Писмени испит из Линеарне алгебра А 27. фебруар 2012.

1. База векторског простора V је $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Нека су U и W потпростори векторског простора V задати са $U = \mathcal{L}(f_1, f_2)$ и $W = \mathcal{L}(g_1, g_2)$, где је:

$$\begin{aligned} f_1 &= e_1 + e_2 + 2e_3 - e_4 & \qquad g_1 &= 3e_1 - e_2 + 3e_3 - e_4 \\ f_2 &= 2e_1 - 3e_2 + e_3 - e_4 & \qquad g_2 &= 2e_1 - 4e_2 + e_3 - 2e_4. \end{aligned}$$

Одредити по једну базу за векторске потпросторе $U + W$ и $U \cap W$.

2. а) Дати су вектори $a = (1, 2, -1)$ и $b = (-3, 2, 4)$ у векторском простору $\mathbb{R}^3$. Одредити неки вектор $c \in \mathbb{R}^3$ тако да је систем $f = (a, b, c)$ база векторског простора $\mathbb{R}^3$.

б) Одредити матрицу преласка са стандардне базе векторског простора $\mathbb{R}^3$ на базу f.

в) Нека је систем вектора $g = (g_1, g_2, g_3)$ база векторског простора $\mathbb{R}^3$, где је

$$\begin{aligned} g_1 &= (\ \ 2, \ 1, \ -2) \\ g_2 &= (-1, \ 4, \ \ \ 0) \\ g_3 &= (\ \ 1, \ 3, \ -2) \end{aligned}$$

Одредити координате вектора $v = (1, 16, -4) \in \mathbb{R}^3$ у бази g.

г) Одредити матрицу преласка са стандардне базе векторског простора $\mathbb{R}^3$ на базу g.

д) Одредити матрицу преласка са базе f на базу g.

3. Нека је матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

а) Користећи искључиво елементарне трансформације на врстама свести матрицу A на канонску форму и одредити њен ранг.

б) Одредити матрицу P тако да $PA = A^0$.

в) Да ли је матрица A инверзибилна? Ако јесте, наћи A^{-1}.

4. Нека је матрица

$$B = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 6 \\ -4 & 5 & -6 \\ -4 & 4 & -5 \end{bmatrix}.$$

Одредити карактеристични и минимални полином матрице B, затим B^n, за $n \in \mathbb{N}$, као и B^{-1}.

5. Нека су V и W векторски простори над пољем F. Ако је $L : V \to W$ линеарно пресликавање и U било који потпростор од W, доказати да је $L^{-1}(U) = \{v \in V \mid L(v) \in U\}$ један потпростор од V.