Линеарна алгебра А, шк.г. 2009/2010.

ЈАНУАРСКИ ИСПИТНИ РОК (први ток)

10.02.2010.

1. У зависности од реалног параметра λ решити систем једначина (над $\mathbb{R}$)

$$\begin{array}{rrrrl} x+ & 2y- & z & & = 0 \\ & -y- & z+ & 2t = & 0 \\ 2x+ & 5y- & z- & (1+\lambda)t = & 0 \\ x+ & (1+\lambda)y- & & 2t = & 0. \end{array}$$

За све λ за које димензија скупа решења система није једнака 0 одредити по једну базу и димензију простора U, W, $U+W$ и $U\cap W$, где је $U=\mathcal{L}((1,0,2,1),(2,-1,5,1+\lambda))$ и $W=\mathcal{L}((1,1,1,0),(0,-2,1+\lambda,2))$.

2. Ако векторски потпростор $\mathbb{U}$ није једнак самом векторском простору $\mathbb{V}$, доказати да је његов комплемент $\mathbb{S}=\mathbb{V}\setminus\mathbb{U}$ једна генератриса у $\mathbb{V}$.

3. Нека је $A=\begin{bmatrix} -1 & \lambda & -2 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & -1 & 0 \\ \lambda & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2\lambda & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(а) У зависности од параметра λ одредити ранг матрице.

(б) Уколико је $\lambda=1$ одредити A^{-1}.

(в) Уколико је $\lambda=0$ одредити канонску матрицу A^0 и инвертибилне матрице P и Q такве да је $A^0=PAQ$.

4. Дато је пресликавање $L:\mathbb{R}^4[X]\to\mathbb{R}^4[X]$ са $L(p)=p'(1)\cdot X+p(-1)\cdot X^2+2p'$.

(а) Доказати да је L линеарни оператор.

(б) Одредити $\operatorname{Ker} L$, $\operatorname{Im} L$, $\operatorname{def} L$, $\operatorname{rang} L$ и барем по једну базу за $\operatorname{Ker} L$ и $\operatorname{Im} L$. Да ли је пресликавање „1-1" или „на"?

(в) Наћи матрице оператора L и L^3 у односу на канонску базу векторског простора $\mathbb{R}^4[X]$. Наћи $L^3(1+X+X^2)$.

5. Одредити детерминанту (реда n)

$$\begin{vmatrix} 7 & 6 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 7 \end{vmatrix}.$$

Резултати ће бити објављени на сајту www.algebra.matf.bg.ac.rs.