Линеарна алгебра А
група 103

22.1.2015.

$\boxed{1}$ У зависности од параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ одредити сва решења система линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} (1-\alpha)x & + & 2y & + & 3z & + & 4t & = & 3 \\ 5x & - & (\alpha+2)y & + & 3z & - & \alpha t & = & 3 \\ 5x & - & 2y & + & (3-\alpha)z & + & (2-\alpha)t & = & (3-\alpha) \end{array}.$$

$\boxed{2}$ Дате су матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \in M_{1,2}(\mathbb{R})$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$.
Нека је U скуп свих матрица X из $M_{2,2}(\mathbb{R})$ за које важи да је $XB = 0$, а W скуп свих матрица X из $M_{2,2}(\mathbb{R})$ за које важи да је $XA^TA - BX = 0$.

а) Доказати да су U и W векторски потпростори простора $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

б) Одредити бар по једну базу за потпросторе U, W, $U+W$, $U \cap W$, као и њихове димензије.

$\boxed{3}$ Нека је $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 2 \\ a & 6 & -4 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$.

а) Одредити ранг матрице A у зависности од реалног параметра a.

б) Ако је $a = 1$, наћи инвертибилне матрице P и Q и канонску матрицу A^0 матрице A тако да је $A^0 = PAQ$. Одредити матрице $B \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ и $C \in M_{2,4}(\mathbb{R})$ тако да је $A = BC$.

$\boxed{4}$ а) Доказати да је систем $f = [f_1, f_2, f_3]$ база векторског простора $\mathbb{R}^3[X]$, где је $f_1 = 7 + 5X - X^2$, $f_2 = -4 - 3X + X^2$ и $f_3 = -3 - 2X + X^2$.
Одредити координате полинома $p = a + bX + cX^2$ у односу на базу f.

б) Ако је $L : \mathbb{R}^3[X] \to \mathbb{R}^3[X]$ пресликавање дефинисано са

$$L(p) = p(1) \cdot f_1 + p(0) \cdot f_2 + p'(0) \cdot f_3,$$

доказати да је L линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3[X]$ и одредити његову матрицу у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^3[X]$.

в) Наћи матрицу преласка са базе e на базу f као и матрицу оператора L у односу на базу f.

Све одговоре детаљно образложити

Линеарна алгебра А
група 103

22.1.2015.

$\boxed{1}$ У зависности од параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ одредити сва решења система линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} (1-\alpha)x & + & 2y & + & 3z & + & 4t & = & 3 \\ 5x & - & (\alpha+2)y & + & 3z & - & \alpha t & = & 3 \\ 5x & - & 2y & + & (3-\alpha)z & + & (2-\alpha)t & = & (3-\alpha) \end{array}.$$

$\boxed{2}$ Дате су матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \in M_{1,2}(\mathbb{R})$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$.
Нека је U скуп свих матрица X из $M_{2,2}(\mathbb{R})$ за које важи да је $XB = 0$, а W скуп свих матрица X из $M_{2,2}(\mathbb{R})$ за које важи да је $XA^TA - BX = 0$.

а) Доказати да су U и W векторски потпростори простора $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

б) Одредити бар по једну базу за потпросторе U, W, $U+W$, $U \cap W$, као и њихове димензије.

$\boxed{3}$ Нека је $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 2 \\ a & 6 & -4 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$.

а) Одредити ранг матрице A у зависности од реалног параметра a.

б) Ако је $a = 1$, наћи инвертибилне матрице P и Q и канонску матрицу A^0 матрице A тако да је $A^0 = PAQ$. Одредити матрице $B \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ и $C \in M_{2,4}(\mathbb{R})$ тако да је $A = BC$.

$\boxed{4}$ а) Доказати да је систем $f = [f_1, f_2, f_3]$ база векторског простора $\mathbb{R}^3[X]$, где је $f_1 = 7 + 5X - X^2$, $f_2 = -4 - 3X + X^2$ и $f_3 = -3 - 2X + X^2$.
Одредити координате полинома $p = a + bX + cX^2$ у односу на базу f.

б) Ако је $L : \mathbb{R}^3[X] \to \mathbb{R}^3[X]$ пресликавање дефинисано са

$$L(p) = p(1) \cdot f_1 + p(0) \cdot f_2 + p'(0) \cdot f_3,$$

доказати да је L линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3[X]$ и одредити његову матрицу у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^3[X]$.

в) Наћи матрицу преласка са базе e на базу f као и матрицу оператора L у односу на базу f.

Све одговоре детаљно образложити