# Linearna algebra A, oktobar 2008. I i III tok

1. Data je matrica $A$ reda $3 \times 4$ nad poljem $\mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 2 & -1 & \alpha & 3 \\ 1 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**a)** U zavisnosti od parametra $\alpha \in \mathbb{R}$ odrediti rang matrice $A$.

**b)** Ako je $\alpha = 3$, odrediti kanonsku matricu $A^0$ matrice $A$ i inverzibilne matrice $P$ i $Q$ takve da je $A^0 = PAQ$.

2. Neka je matrica A reda 3 nad poljem $\mathbb{R}$ odredjena sa

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

**a)** Odrediti karakteristični polinom $\varphi = det(A - \lambda E)$ i minimalni polinom $\mu$ matrice $A$.
Da li je matrica $A$ slična nekoj dijagonalnoj matrici nad poljem $\mathbb{R}$?

**b)** Odrediti sve komponente matrice $A^n$, gde je n bilo koji prirodan broj.

**c)** Dokazati da jezgro $Ker(A + 4E)$ sadrži i neku kolonu $P_1$ koja nije nula.

**d)** Odrediti jezgro $Ker(A - 2E)$ matrice $A - 2E$ i jezgro $Ker(A - 2E)^2$ matrice $(A - 2E)^2$.
Zatim dokazati da jezgro $Ker(A - 2E)$ sadrži bar jednu kolonu $P_3$ koja nije u jezgru $Ker(A - 2E)^2$.

**e)** Ako je $P = [P_1, P_2, P_3]$ matrica čije su kolone $P_1$, $P_2 = (A - 2E)P_3$ i $P_3$, dokazati da je $P$ inverzibilna i odrediti njen inverz.

**f)** Odrediti matricu $J = P^{-1}AP$.

3*. Neka je $P \in M_n(\mathbb{R})$ kvadratna matrica reda $n$ za koju važi da je $P^2 = P$.
Ako je $U = KerP$, a $W = Ker(E - P)$, dokazati da je $\mathbb{R}^n = U \oplus W$.