Linearna algebra i analitička geometrija, II kolokvijum, februar 2007.

1. Linearni operator L prostora R^4 dat je formulom

$$L(x,y,z,t) = (3x+y+z+t, x+3y+z+t, x+y+3z+t, x+y+z+3t).$$

Izračunati determinantu operatora L.

2. Izračunati $adj(A)$ i A^{-1} ako je $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Odrediti karakteristični i minimalni polinom matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Zatim odrediti sopstvene vrednosti i baze odgovarajućih sopstvenih podprostora matrice A.

4. Data je matrica $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Izračunati A^n.

5. Koristeći Gram-Šmitov postupak naći ortonormiranu bazu podprostora W prostora R^4 generisanog vektorima $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (2,1,1,0)$ i $v_3 = (1,1,1,-1)$. Zatim odrediti bazu za $W^{\perp}$.

6. Odrediti ugao koji vektor $v = (4,-1,-4)$ zaklapa sa skupom rešenja W jednačine $x+y+z=0$ u R^3 u odnosu na standarni skalarni proizvod. Zatim odrediti rastojanje vektora v od datog podprostora W.

Teorija

1. Neka je $T : V \to V$ linearni operator i neka su $v_1, v_2, ..., v_n$ sopstveni vektori koji odgovaraju uzajamno različitim sopstvenim vrednostima operatora T. Dokazati da su $v_1, v_2, ..., v_n$ linearno nezavisni.

2. Neka je V vektorski prostor sa skalarnim proizvodom i neka je $e_1, e_2, ..., e_n$ jedna njegova ortonormirana baza. Dokazati da za svaki vektor x prostora V važi: $x = (x,e_1)e_1 + (x,e_2)e_2 + ... + (x,e_n)e_n$.