Linearna algebra i analitička geometrija, april 2007.

1.Rešiti sistem:

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & - & z & + & 3w & = & 3 \\ 2x & + & 4y & + & 4z & + & 3w & = & 9 \\ 3x & + & 6y & - & z & + & 8w & = & 10 \end{array}$$

2. Neka je $U = \{p \in R^4[x] \mid p(1) = p'(-1) = 0\}$.

a) Dokazati da je U vektorski potprostor vektorskog prostora $R^4[x]$.

b) Ako je $W = L\{1 + x + x^2 + x^3,\ 1 + 6x + x^2,\ 6 + x + x^3\}$ odrediti bazu i dimenziju prostora $U + W$. Odrediti zatim dimenziju prostora $U \cap W$.

3. Neka je L linearni operator prostora R^3 zadat sa $L((a, b, c)) = (a - b + c,\ 2a + b,\ 3b - 4c)$.

a) Odrediti matricu operatora L u odnosu na kanonsku bazu $e = \{e_1 = (1, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, 0),\ e_3 = (0, 0, 1)\}$.

b) Izračunati determinantu operatora L i rang operatora L.

c) Ispitati da li je operator L invertibilan. Ako jeste odrediti matricu operatora L^{-1} u odnosu na kanonsku bazu.

4. Data je matrica $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Odrediti karakteristični i minimalni polinom matrice$A$.

b) Odrediti sopstvene vrednosti i sopstvene vektore matrice A.

c) Izračunati A^n.

5. Neka je $V = \{x \in R^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \text{ i } 3x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$. Koristeći Gram-Šmitov postupak naći ortonormirane baze podprostora V i $V^\perp$.

6. Neka je V vektorski podprostor vektorskog prostora R^5 generisan vektorima $a = (-1, 2, 3, 2, 1)$ i $b = (2, -1, 7, 4, 2)$.

a) Odrediti ortogonalne projekcije vektora $w = (-2, 7, 10, 4, 3)$ na V i $V^\perp$.

b) Kojem od podprostora V i $V^\perp$ je bliži vektor w?

Linearna algebra i analitička geometrija, april 2007.

1.Rešiti sistem:

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & - & z & + & 3w & = & 3 \\ 2x & + & 4y & + & 4z & + & 3w & = & 9 \\ 3x & + & 6y & - & z & + & 8w & = & 10 \end{array}$$

2. Neka je $U = \{p \in R^4[x] \mid p(1) = p'(-1) = 0\}$.

a) Dokazati da je U vektorski potprostor vektorskog prostora $R^4[x]$.

b) Ako je $W = L\{1 + x + x^2 + x^3,\ 1 + 6x + x^2,\ 6 + x + x^3\}$ odrediti bazu i dimenziju prostora $U + W$. Odrediti zatim dimenziju prostora $U \cap W$.

3. Neka je L linearni operator prostora R^3 zadat sa $L((a, b, c)) = (a - b + c,\ 2a + b,\ 3b - 4c)$.

a) Odrediti matricu operatora L u odnosu na kanonsku bazu $e = \{e_1 = (1, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, 0),\ e_3 = (0, 0, 1)\}$.

b) Izračunati determinantu operatora L i rang operatora L.

c) Ispitati da li je operator L invertibilan. Ako jeste odrediti matricu operatora L^{-1} u odnosu na kanonsku bazu.

4. Data je matrica $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Odrediti karakteristični i minimalni polinom matrice$A$.

b) Odrediti sopstvene vrednosti i sopstvene vektore matrice A.

c) Izračunati A^n.

5. Neka je $V = \{x \in R^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \text{ i } 3x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$. Koristeći Gram-Šmitov postupak naći ortonormirane baze podprostora V i $V^\perp$.

6. Neka je V vektorski podprostor vektorskog prostora R^5 generisan vektorima $a = (-1, 2, 3, 2, 1)$ i $b = (2, -1, 7, 4, 2)$.

a) Odrediti ortogonalne projekcije vektora $w = (-2, 7, 10, 4, 3)$ na V i $V^\perp$.

b) Kojem od podprostora V i $V^\perp$ je bliži vektor w?