

Linearna algebra i analitička geometrija, 23.4.2008.

Zadaci

1. Rešiti sistem linearnih jednačina:

$$x + 3y + z - t = 2$$

$$2x - 2y + t = -3$$

$$2x + 3y + z - 3t = -6$$

$$3x + 4y - z + 2t = 0.$$

2. Neka je U potprostor vektorskog prostora \mathbb{R}^4 generisan vektorima:

$$u_1 = (1, 1, 0, -1)$$

$$u_2 = (1, 2, 3, 0)$$

$u_3 = (2, 3, 3, -1)$, a V potprostor generisan vektorima:

$$v_1 = (1, 2, 2, -2)$$

$$v_2 = (2, 3, 2, -3)$$

$$v_3 = (1, 3, 4, -3).$$

Naći bazu i dimenziju za prostore U , V , $U + V$ i $U \cap V$.

3. Neka je $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ linearni operator vektorskog prostora \mathbb{R}^3 definisan sa

$$L(x, y, z) = (-2x + y + 2z, 2x + y + 4z, x - z).$$

a) Odrediti matricu operatora L u odnosu na kanonsku bazu e prostora \mathbb{R}^3 .

b) Ispitati da li je L invertibilan i u slučaju da jeste, odrediti matricu operatora L^{-1} u odnosu na bazu e .

4. Data je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Odrediti karakteristični i minimalni polinom matrice A .

b) Izračunati sopstvene vrednosti i sopstvene vektore matrice A .

c) Ispitati da li je matrica A dijagonalnog tipa i u slučaju da jeste naći invertibilnu matricu P i dijagonalnu D tako da je $D = P^{-1}AP$.

5. Odrediti ugao između vektora $a = (2, 6, -2, 6)$ i potprostora U vektorskog prostora \mathbb{R}^4 sa standardnim skalarnim proizvodom ako je U generisan vektorima $(1, 4, 3, 0)$ i $(0, 3, 2, 1)$.

6. U euklidskom vektorskom prostoru \mathbb{R}^4 sa standardnim skalarnim proizvodom dat je potprostor U generisan vektorima:

$$(1, 0, 1, 0), (1, 1, 3, 0) \text{ i } (0, 2, 0, 1).$$

Odrediti ortonormiranu bazu potprostora U .

Teorija

1. Definisati linearni omotač i navesti njegove osobine

2. Neka su $x_1, \dots, x_n \in V$ vektori vektorskog prostora V i $A : V \rightarrow V$ linearno preslikavanje tog vektorskog prostora. Ako su Ax_1, \dots, Ax_n linearno nezavisni, tada su i x_1, \dots, x_n linearno nezavisni vektori. Dokazati.

3. Definisati sopstvene vrednosti i sopstvene vektore linearnog operatora

4. Rastojanje vektora od potprostora

5. Simetrični operatori euklidskih vektorskih prostora: matrica u ortonormiranoj bazi i dijagonalizacija