Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, 14.02.2012.

1. Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$:
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & 4y & + & 4z & + & 2t & = & 0 \\ 3x & + & 3y & + & 2z & + & t & = & 2. \\ -4x & - & 2y & & & & & = & -4. \\ x & + & 5y & + & 3z & + & 2t & = & -2 \\ 4x & + & 2y & + & 3z & + & t & = & 4 \end{array}$$

2. Нека су U и V потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисани редом векторима:
$$\begin{array}{lll} u_1 = (1,\ 2,\ 1,\ 3) & & v_1 = (-1,\ -2,\ 3,\ 5) \\ u_2 = (4,\ 7,\ 3,\ 5) & & v_2 = (\ 2,\ 3,\ 1,\ -1) \\ u_3 = (5,\ 8,\ 3,\ 1), & & v_3 = (-2,\ -5,\ 13,\ 19). \end{array}$$
Наћи бар једну базу, као и димензију простора U, V, $U+V$ и $U\cap V$

3. Нека је $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3$ дефинисан са $L(x,y,z)=(x+2y+2z, x+y+z, 3x+y)$.

   а) Наћи матрицу оператора L у односу на канонску базу простора $\mathbb{R}^3$.

   б) Одредити ранг и дефект оператора L.

   в) Да ли је оператор L инвертибилан? Ако јесте, одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на канонску базу простора $\mathbb{R}^3$.

4. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 10 \end{bmatrix}$.
Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A. Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $D=P^{-1}AP$.

5. Нека је V потпростор векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима $f_1=(1,3,5,1)$, $f_2=(11,1,3,7)$ и $f_3=(4,-10,-18,8)$.
Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити ортонормирану базу за V.

6. Дат је векторски простор W решења једначине $x+2y+z=0$ у $\mathbb{R}^3$.

   а) Наћи базу и димензију векторског простора W.

   б) Наћи базу и димензију векторског простора $W^{\perp}$.

   в) Одредити ортогоналну пројекцију и ортогоналну допуну вектора $v=(-3,4,7)$ на простор W, као и растојање вектора v од векторског простора W.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, 14.02.2012.

1. Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$:
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & 4y & + & 4z & + & 2t & = & 0 \\ 3x & + & 3y & + & 2z & + & t & = & 2. \\ -4x & - & 2y & & & & & = & -4. \\ x & + & 5y & + & 3z & + & 2t & = & -2 \\ 4x & + & 2y & + & 3z & + & t & = & 4 \end{array}$$

2. Нека су U и V потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисани редом векторима:
$$\begin{array}{lll} u_1 = (1,\ 2,\ 1,\ 3) & \quad & v_1 = (-1,\ -2,\ 3,\ 5) \\ u_2 = (4,\ 7,\ 3,\ 5) & & v_2 = (2,\ 3,\ 1,\ -1) \\ u_3 = (5,\ 8,\ 3,\ 1), & & v_3 = (-2,\ -5,\ 13,\ 19). \end{array}$$
Наћи бар једну базу, као и димензију простора U, V, $U+V$ и $U \cap V$

3. Нека је $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3$ дефинисан са $L(x,y,z) = (x+2y+2z, x+y+z, 3x+y)$.
   а) Наћи матрицу оператора L у односу на канонску базу простора $\mathbb{R}^3$.
   б) Одредити ранг и дефект оператора L.
   в) Да ли је оператор L инвертибилан? Ако јесте, одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на канонску базу простора $\mathbb{R}^3$.

4. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 10 \end{bmatrix}$.
Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A. Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $D = P^{-1}AP$.

5. Нека је V потпростор векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима $f_1 = (1,3,5,1)$, $f_2 = (11,1,3,7)$ и $f_3 = (4,-10,-18,8)$.
Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити ортонормирану базу за V.

6. Дат је векторски простор W решења једначине $x + 2y + z = 0$ у $\mathbb{R}^3$.
   а) Наћи базу и димензију векторског простора W.
   б) Наћи базу и димензију векторског простора $W^{\perp}$.
   в) Одредити ортогоналну пројекцију и ортогоналну допуну вектора $v = (-3,4,7)$ на простор W, као и растојање вектора v од векторског простора W.