Linearna algebra i analitička geometrija, oktobar 2007.

1.Rešiti sistem:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & - & 2z & + & 2w & = & -1 \\ 2x & + & 2y & - & 2z & - & w & = & 2 \\ 3x & - & 5y & + & 4z & + & 3w & = & -5 \\ x & + & 5y & - & 6z & - & 2w & = & 5 \end{array}$$

2. Ako je L linearni operator vektorskog prostora R^4 definisan sa $L(x,y,z,t) = (-x+3z, -y+3t, 2x-6z, 2y-6t)$, odrediti rang, defekt i baze jezgra i slike datog operatora L.

3. Neka je L linearni operator prostora $R^3[X]$ (prostor polinoma stepena manjeg od 3) zadat sa $L(p) = 2p' - p$.

a) Odrediti matricu operatora L u odnosu na kanonsku bazu $e = \{e_1 = 1,\ e_2 = x,\ e_3 = x^2\}$.

b) Izračunati determinantu operatora L.

c) Ispitati da li je operator L invertibilan. Ako jeste odrediti matricu operatora L^{-1} u odnosu na kanonsku bazu.

4. Data je matrica $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Odrediti karakteristični i minimalni polinom matrice$A$.

b) Odrediti sopstvene vrednosti i baze odgovarajucih sopstvenih potprostora matrice A.

c) Da li se matrica A može dijagonalizovati. Ako je odgovor potvrdan naći invertibilnu matricu P i dijagonalnu B tako da važi $B = P^{-1}AP$.

5. Koristeći Gram-Šmitov postupak naći ortonormiranu bazu potprostora W prostora R^4 generisanog vektorima $v_1 = (2,-1,2,0)$, $v_2 = (1,1,4,0)$ i $v_3 = (-1,5,-1,4)$.

6. Neka je V vektorski potprostor vektorskog prostora R^4 generisan vektorima $a = (1,2,1,2)$ i $b = (4,3,1,2)$.

a) Odrediti ortogonalne projekcije vektora $w = (1,2,-1,-2)$ na V i $V^\perp$.

b) Kojem od prostora V i $V^\perp$ je bliži vektor w?

Linearna algebra i analitička geometrija, oktobar 2007.

1.Rešiti sistem:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & - & 2z & + & 2w & = & -1 \\ 2x & + & 2y & - & 2z & - & w & = & 2 \\ 3x & - & 5y & + & 4z & + & 3w & = & -5 \\ x & + & 5y & - & 6z & - & 2w & = & 5 \end{array}$$

2. Ako je L linearni operator vektorskog prostora R^4 definisan sa $L(x,y,z,t) = (-x+3z, -y+3t, 2x-6z, 2y-6t)$, odrediti rang, defekt i baze jezgra i slike datog operatora L.

3. Neka je L linearni operator prostora $R^3[X]$ (prostor polinoma stepena manjeg od 3) zadat sa $L(p) = 2p' - p$.

a) Odrediti matricu operatora L u odnosu na kanonsku bazu $e = \{e_1 = 1,\ e_2 = x,\ e_3 = x^2\}$.

b) Izračunati determinantu operatora L.

c) Ispitati da li je operator L invertibilan. Ako jeste odrediti matricu operatora L^{-1} u odnosu na kanonsku bazu.

4. Data je matrica $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Odrediti karakteristični i minimalni polinom matrice$A$.

b) Odrediti sopstvene vrednosti i baze odgovarajucih sopstvenih potprostora matrice A.

c) Da li se matrica A može dijagonalizovati. Ako je odgovor potvrdan naći invertibilnu matricu P i dijagonalnu B tako da važi $B = P^{-1}AP$.

5. Koristeći Gram-Šmitov postupak naći ortonormiranu bazu potprostora W prostora R^4 generisanog vektorima $v_1 = (2,-1,2,0)$, $v_2 = (1,1,4,0)$ i $v_3 = (-1,5,-1,4)$.

6. Neka je V vektorski potprostor vektorskog prostora R^4 generisan vektorima $a = (1,2,1,2)$ i $b = (4,3,1,2)$.

a) Odrediti ortogonalne projekcije vektora $w = (1,2,-1,-2)$ na V i $V^\perp$.

b) Kojem od prostora V i $V^\perp$ je bliži vektor w?