Линеарна алгебра Б, април 2009, први и трећи ток

$\boxed{\text{А}}$ Нека је пресликавање $L : \mathbb{R}^4[x] \to \mathbb{R}^4[x]$ дефинисано са
$L(p) = p(x) + (x-3)p(1) - 2(x-1)p'(1)$.

1° Доказати да је L један линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^4[x]$.
Да ли је L "1-1"?

2° Одредити матрицу оператора L у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^4[x]$.

3° Наћи сопствене вредности и сопствене векторе оператора L.
Испитати да ли је L дијагоналног типа.

4° Одредити матрицу преласка са канонске базе e простора $\mathbb{R}^4[x]$ на базу
$f = [(x-1)^3, (x-1)^2, (x-1), 1]$, а затим наћи и матрицу оператора L
у односу на базу f.

$\boxed{\text{Б}}$ Доказати да је са
$(a, b, c) \circ (\alpha, \beta, \gamma) = 3a\alpha + 2b\beta + 2c\gamma + 2c\alpha + 2a\gamma$
дефинисан један скаларни производ у векторском простору $\mathbb{R}^3$.
Затим одредити растојање вектора $a = (1, 1, 1)$ од потпростора $U = \mathcal{L}(e_1, e_2)$ где је
$e_1 = (1, 1, 0),\ e_2 = (-1, 0, 1)$.

$\boxed{\text{Ц}}$ Нека је $e = [e_1, e_2, e_3]$ ортонормирана база еуклидског векторског простора V и нека је
дата квадратна форма Q на V на следећи начин:
$Q(xe_1 + ye_2 + ze_3) = 3x^2 + 3z^2 + 4xy + 8xz + 4yz$.
Одредити бар једну ортонормирану базу $f = [f_1, f_2, f_3]$ простора V у којој форма Q има
канонски облик и изразити Q преко координата x', y', z' у новој бази f.

$\boxed{\text{Д}}$ Нека је L линеарни оператор векторског простора V димензије n такав да је
$\rho(L - I) = 1$ и да је $L^2 = I$.
Одредити $\rho(L + I)$.