Linearna algebra B, Oktobar 2

Zadaci

1. Neka je $V = M_2(\mathbb{R})$.

a) Dokazati da je sa $L(X) = AX - XA$, gde je
$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ zadat jedan linearni operator vektorskog prostora V.

b) Odrediti matricu operatora L u odnosu na kanonsku bazu prostora V.

c) Odrediti jezgro, rang i defekt operatora L.
Da li je L "1-1" i "na"?

2. Na vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3[x]$ dato je preslikavanje $\circ : \mathbb{R}^3[x] \times \mathbb{R}^3[x] \to \mathbb{R}$ na sledeći način:

$$p \circ q = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

a) Dokazati da je $\circ$ jedan skalarni proizvod na vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3[x]$.

b) Odrediti rastojanje vektora $p(x) = -2x^2 - 3x$ od potprostora U generisanog vektorima
$e_1 = 1 - x$ i $e_2 = x^2 - 2$.

3. Neka je $e = [e_1, e_2, e_3]$ ortonormirana baza euklidskog vektorskog prostora V i neka je data kvadratna forma Q na V na sledeći način:

$$Q(xe_1 + ye_2 + ze_3) = 3x^2 + y^2 + 3z^2 + 6xy + 2xz + 6yz.$$

Odrediti bar jednu ortonormiranu bazu $f = [f_1, f_2, f_3]$ prostora V u kojoj forma Q ima kanonski oblik i izraziti Q preko koordinata x', y', z' u novoj bazi f.

4. Neka je L linearni operator ranga r na vektorskom prostoru V dimenzije n.
Dokazati da je njegov karakteristični polinom oblika $\varphi(\lambda) = \lambda^{n-r} \cdot p(\lambda)$.

Teorija

1. Razvoj determinante i posledice
2. Invarijantni potprostori linearnog operatora. Sopstvene vrednosti i sopstveni vektori linearnog operatora
3. Aksiome skalarnog proizvoda, norma vektora, rastojanje i ugao izmedju dva vektora. Pitagorina teorema.
4. Ortogonalnost. Ortogonalni komplement i ortogonalna projekcija