Линеарна алгебра Б, 30. јун 2012.
трећи ток

А Нека је L линеарни оператор векторског простора V димензије 4 над пољем $\mathbb{R}$ одређен својом матрицом

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

у односу на неку фиксирану базу $e = [e_1, e_2, e_3, e_4]$

1° Одредити карактеристични и минимални полином оператора L.

2° Одредити бар једну базу за KerL и допунити је векторима u и v до базе целог простора V.

3° Доказати да вектори $f_1 = L(u),\ f_2 = u,\ f_3 = L(v)$ и $f_4 = v$ одређују базу простора V и наћи матрицу пресликавања L у односу на базу f.

4° Одредити матрицу преласка P са базе e на базу f.

Б На векторском простору $V = M_2(\mathbb{R})$ дат је стандардни скаларни производ

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = aa_1 + bb_1 + cc_1 + dd_1.$$

1° Ако је U потпростор свих матрица из V које комутирају са матрицом $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, одредити бар једну ортонормирану базу за U и за $U^\perp$ у односу на дати скаларни производ.

3° Одредити ортогоналну пројекцију вектора $M = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ на потпростор U, а затим и растојање вектора M од потпростора U и $U^\perp$.
Ком простору је вектор M ближи?

В Нека је $e = [e_1, e_2, e_3]$ ортонормирана база еуклидског векторског простора V и нека је дата квадратна форма Φ на V на следећи начин:

$$\Phi(v) = 5x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 8xy - 4xz + 4yz, \quad v = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

1° Одредити бар једну ортонормирану базу $f = [f_1, f_2, f_3]$ простора V у којој форма Φ има канонски облик.

2° Изразити Φ преко координата x', y', z' у новој бази f.

3° Написати формуле трансформације координата.

Г Нека је линеарни оператор $L : V \to V$ дијагоналан.

1° Доказати да је $\mathrm{KerL} \cap \mathrm{ImL} = \{0\}$.

2° Да ли је $V = \mathrm{KerL} \oplus \mathrm{ImL}$?

Линеарна алгебра Б, 30. јун 2012.
трећи ток

А Нека је L линеарни оператор векторског простора V димензије 4 над пољем $\mathbb{R}$ одређен својом матрицом

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

у односу на неку фиксирану базу $e = [e_1, e_2, e_3, e_4]$

1° Одредити карактеристични и минимални полином оператора L.

2° Одредити бар једну базу за KerL и допунити је векторима u и v до базе целог простора V.

3° Доказати да вектори $f_1 = L(u),\ f_2 = u,\ f_3 = L(v)$ и $f_4 = v$ одређују базу простора V и наћи матрицу пресликавања L у односу на базу f.

4° Одредити матрицу преласка P са базе e на базу f.

Б На векторском простору $V = M_2(\mathbb{R})$ дат је стандардни скаларни производ

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = aa_1 + bb_1 + cc_1 + dd_1.$$

1° Ако је U потпростор свих матрица из V које комутирају са матрицом $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, одредити бар једну ортонормирану базу за U и за $U^\perp$ у односу на дати скаларни производ.

3° Одредити ортогоналну пројекцију вектора $M = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ на потпростор U, а затим и растојање вектора M од потпростора U и $U^\perp$.
Ком простору је вектор M ближи?

В Нека је $e = [e_1, e_2, e_3]$ ортонормирана база еуклидског векторског простора V и нека је дата квадратна форма Φ на V на следећи начин:

$$\Phi(v) = 5x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 8xy - 4xz + 4yz, \quad v = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

1° Одредити бар једну ортонормирану базу $f = [f_1, f_2, f_3]$ простора V у којој форма Φ има канонски облик.

2° Изразити Φ преко координата x', y', z' у новој бази f.

3° Написати формуле трансформације координата.

Г Нека је линеарни оператор $L : V \to V$ дијагоналан.

1° Доказати да је $\mathrm{KerL} \cap \mathrm{ImL} = \{0\}$.

2° Да ли је $V = \mathrm{KerL} \oplus \mathrm{ImL}$?