Линеарна алгебра Б, други ток **11. септембар 2011.**

$\boxed{1}$ Одредити детерминанту

$$\begin{vmatrix} \alpha_1+1 & \alpha_1+2 & \dots & \alpha_1+n \\ \alpha_2+1 & \alpha_2+2 & \dots & \alpha_2+n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n+1 & \alpha_n+2 & \dots & \alpha_n+n \end{vmatrix}.$$

$\boxed{2}$ На векторском простору $\mathbb{R}^3[X]$ дато је пресликавање $\circ : \mathbb{R}^3[X] \times \mathbb{R}^3[X] \to \mathbb{R}$ на следећи начин:

$$p \circ q = p(-1)q(-1) + p'(0)q'(0) + p'(1)q'(1).$$

а) Доказати да је $\circ$ један скаларни производ на векторском простору $\mathbb{R}^3[X]$.

б) Ако је $U = \{p \in \mathbb{R}^3[X] : p''(0) = 0\}$, наћи бар једну ортонормирану базу за U и за $U^\perp$ у односу на задат скаларни производ.

в) Одредити ортогоналну пројекцију вектора $p(X) = 2 + X + X^2$ на потпростор U, а затим и растојање вектора p од потпростора U.

$\boxed{3}$ Нека је $e = [e_1, e_2, e_3]$ ортонормирана база векторског простора $\mathbb{R}^3$ и нека је пресликавање $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ дефинисано са

$$L(x) = (e_1 \circ x)(3e_1 - 2e_2) + (e_2 \circ x)(3e_2 - 2e_1) + 5(e_3 \circ x)e_3,$$

где је $\circ$ стандардни скаларни производ у $\mathbb{R}^3$.

а) Наћи матрицу линеарног оператора L у односу на базу e. Да ли је оператор L симетричан?

б) Одредити бар једну ортонормирану базу f простора $\mathbb{R}^3$ у којој оператор L има дијагоналну матрицу и написати матрицу оператора L у нађеној бази.

$\boxed{4}$ Нека су L и G линеарни оператори коначно-димензионог векторског простора V такви да је $L + G = I$, $G \circ L = 0$ и $G^2 = G$. Доказати да је $V = \mathrm{Im}L \oplus \mathrm{Im}G$ као и да је $\rho(L) = \delta(G)$.

Линеарна алгебра Б, други ток **11. септембар 2011.**

$\boxed{1}$ Одредити детерминанту

$$\begin{vmatrix} \alpha_1+1 & \alpha_1+2 & \dots & \alpha_1+n \\ \alpha_2+1 & \alpha_2+2 & \dots & \alpha_2+n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n+1 & \alpha_n+2 & \dots & \alpha_n+n \end{vmatrix}.$$

$\boxed{2}$ На векторском простору $\mathbb{R}^3[X]$ дато је пресликавање $\circ : \mathbb{R}^3[X] \times \mathbb{R}^3[X] \to \mathbb{R}$ на следећи начин:

$$p \circ q = p(-1)q(-1) + p'(0)q'(0) + p'(1)q'(1).$$

а) Доказати да је $\circ$ један скаларни производ на векторском простору $\mathbb{R}^3[X]$.

б) Ако је $U = \{p \in \mathbb{R}^3[X] : p''(0) = 0\}$, наћи бар једну ортонормирану базу за U и за $U^\perp$ у односу на задат скаларни производ.

в) Одредити ортогоналну пројекцију вектора $p(X) = 2 + X + X^2$ на потпростор U, а затим и растојање вектора p од потпростора U.

$\boxed{3}$ Нека је $e = [e_1, e_2, e_3]$ ортонормирана база векторског простора $\mathbb{R}^3$ и нека је пресликавање $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ дефинисано са

$$L(x) = (e_1 \circ x)(3e_1 - 2e_2) + (e_2 \circ x)(3e_2 - 2e_1) + 5(e_3 \circ x)e_3,$$

где је $\circ$ стандардни скаларни производ у $\mathbb{R}^3$.

а) Наћи матрицу линеарног оператора L у односу на базу e. Да ли је оператор L симетричан?

б) Одредити бар једну ортонормирану базу f простора $\mathbb{R}^3$ у којој оператор L има дијагоналну матрицу и написати матрицу оператора L у нађеној бази.

$\boxed{4}$ Нека су L и G линеарни оператори коначно-димензионог векторског простора V такви да је $L + G = I$, $G \circ L = 0$ и $G^2 = G$. Доказати да је $V = \mathrm{Im}L \oplus \mathrm{Im}G$ као и да је $\rho(L) = \delta(G)$.