Математичка логика у рачунарству, Јануар *3. фебруар 2016.*

1. На језику $\mathcal{L} = \{\in\}$, где је $\in$ бинарни релацијски симбол, посматрајмо теорију T коју чине следеће две аксиоме теорије скупова:

$$\exists x \, \forall y \, \neg (y \in x); \qquad \text{и} \qquad \forall xy \, (x = y \Leftrightarrow \forall z \, (z \in x \Leftrightarrow z \in y)).$$

(Прва аксиома каже да постоји скуп без елемената, а друга каже да су два скупа једнака акко имају исте елементе.) У природној дедукцији доказати да постоји јединствен скуп без елемената, тј. доказати:

$$T \vdash \exists x \, (\forall y \, \neg (y \in x) \wedge \forall z \, (\forall y \, \neg (y \in z) \Rightarrow z = x)).$$

2. Одредити Сколемове форме следећих формула:

(а) $\exists x \, \forall y \, p(x,y) \wedge \exists x \, \forall y \, q(x,y)$; **(б)** $\exists x \, \forall y \, p(x,y) \vee \exists x \, \forall y \, q(x,y)$;

(в) $\exists x \, \forall y \, p(x,y) \Rightarrow \exists x \, \forall y \, q(x,y)$.

3. Дати пример коначне теорије T такве да је $\mathrm{fs}(T) = \{n^2 + 1 \mid n \geq 1\}$.

Решење. **I пример.** Посматрајмо језик $\mathcal{L} = \{a, b, E, F, G\}$, где су a, b константни симболи, E, G бинарни релацијски симболи и F тернарни релацијски симбол. Нека је T теорија на језику $\mathcal{L}$ која каже:

- a и b су различити;
- E је релација еквиваленције;
- a је само са собом у релацији E;
- $F(u, -, -)$ је бијекција између b-ове и u-ове класе ($u \neq a$), где $F(u, x, y)$ значи да бијекција $F(u, -, -)$ слика елемент b-ове класе x у елемент u-ове класе y; прецизније:
  - $\forall uxy(F(u, x, y) \Rightarrow E(b, x) \wedge E(u, y))$;
  - $\forall ux(u \neq a \wedge E(b, x) \Rightarrow \exists_1 y F(u, x, y))$;
  - $\forall uy(u \neq a \wedge E(u, y) \Rightarrow \exists_1 x F(u, x, y))$;
- $G(-, -)$ је бијекција између b-ове класе и скупа свих не-a-овых класа, где $G(x, y)$ значи да елемент b-ове класе x бира представника y неке друге класе, али тако да бира само једног, да различити елементи b-ове класе бирају представнике раличитих класа, и представник из сваке класе је изабран; прецизније:
  - $\forall xy(G(x, y) \Rightarrow E(b, x) \wedge y \neq a)$;
  - $\forall x_1 x_2 y_1 y_2 (x_1 \neq x_2 \wedge G(x_1, y_1) \wedge G(x_2, y_2) \Rightarrow \neg E(y_1, y_2))$;
  - $\forall x(E(b, x) \Rightarrow \exists_1 y G(x, y))$;
  - $\forall y'(y' \neq a \Rightarrow \exists xy(E(y', y) \wedge G(x, y)))$.

Ако је $\mathbb{M}$ модел ове теорије, онда имамо у њему интерпретирано a чија класа не садржи друге елементе. Ако је n кардиналност b-ове класе, како је она у бијекцији са свим не-a-овим класама, то су све не-a-ове класе n-точлане. Такође како сваки елемент b-ове класе на различите начине бира представнике свих не-a-ових класа, то имамо n не-a-ових класа. Према томе $\mathbb{M}$ има n класа са по n елемената и још интерпретацију од a, тј. $n^2 + 1$ елемената.

Са друге стране, лако је да нађемо модел за T кардиналности $n^2 + 1$. Нпр. можемо узети на скупу $A = \{(0, 0)\} \cup \{(i, j) \mid 1 \leq i, j, \leq n\}$ релације:

- $a = (0, 0)$, $b = (1, 1)$;
- $E((i, j), (k, l))$ акко $i = k$;
- $F((i, j), (k, l), (s, t))$ акко $k = 1$, $i = s$ и $l = t$;
- $G((i, j), (k, l))$ акко $i = 1$, $j = k$ и $l = 1$.

II пример. Нека је T_0 теорија „делимичне аритметике" на језику $\mathcal{L}_0 = \{1, c, <, S, Z, P\}$ коју смо конструисали на вежбама. Нека је $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \cup \{b\}$, где је b константни симбол и T теорија T_0 проширена са $S(b, c)$ и $\exists x \, P(x, x, b)$. Ако је $\mathbb{M}$ модел теорије T кардиналности N, тада c „кодира" N, а b који је његов претходник „кодира" $N - 1$, и по другој аксиоми b је квадрат, тј. $N - 1 = n^2$, па је кардиналност $N = n^2 + 1$. Са друге стране можемо у канонском моделу $\mathbb{M}_{n^2+1}$ са вежби да интерпретирамо b као n^2, да бисмо добили модел теорије T. $\square$

Коментар. Претходно решење не би требало да је јасно читаоцу. Да би постало јасно, нацртајте слику.

Нека је $A = \{(m,n) \mid m,n \in \mathbf{N},\ m \leq n\}$, E релација еквиваленције на A дата са:

$$(m_1,n_1)\ E\ (m_2,n_2) \qquad \text{акко} \qquad n_1 = n_2,$$

и $P_n = \{(m,n) \mid m \in \mathbf{N},\ m \leq n\}$, за све $n \in \mathbf{N}$. Нека су $\mathbb{A} = (A,E)$ и $\mathbb{B} = (A,E,P_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

---

4. **(а)** Одредити $\mathrm{dcl}^{\mathbb{A}}(\emptyset)$, $\mathrm{dcl}^{\mathbb{A}}(a)$ и $\mathrm{dcl}^{\mathbb{A}}(a,b)$, где су $a,b \in A$ произвољни.

(б) Доказати да су све E-класе $\emptyset$-дефинабилне у моделу $\mathbb{A}$.

(в) Нека је $S = \{(0,n) \mid n \in \mathbf{N}\}$. Да ли је скуп S дефинабилан (са параметрима) у моделу $\mathbb{A}$?

Решење. Приметимо да су E-класе заправо скупови P_n, при чему је P_n јединствена класа са $n+1$ елементом.

(б) Формула:

$$\exists x_0 \dots x_n \left[\bigwedge_{0\leq i<j\leq n} E(x_i,x_j) \wedge \bigwedge_{0\leq i<j\leq n} x_i \neq x_j \wedge \bigvee_{0\leq i\leq n} x = x_i \wedge \forall y \left(E(x,y) \Rightarrow \bigvee_{0\leq i\leq n} y = x_i \right) \right]$$

каже да је x у $n+1$-точланој класи, па она дефинише P_n, тј. P_n је $\emptyset$-дефинабилна.

Опишимо сада како изгледају аутоморфизми модела $\mathbb{A}$. Сваки аутоморфизам мора да фиксира скупове P_n (јер су $\emptyset$-дефинабилни), према томе рестрикција f_n аутоморфизма f на скуп P_n је његова пермутација. Обратно, јасно је да је аутоморфизам одређен низом пермутација скупова P_n.

(а) $\mathrm{dcl}(\emptyset) = \{(0,0)\}$. Јасно је да ниједан други елемент не припада $\mathrm{dcl}(\emptyset)$ јер је његова класа бар двочлана, па постоји аутоморфизам који тај елемент ,,помери". Формула која дефинише P_0 из дела **(б)**, дефинише само $(0,0)$, па $(0,0) \in \mathrm{dcl}(\emptyset)$.

$\mathrm{dcl}(a)$ зависи од елемента a. Ако је $a = (0,0)$, тада је $\mathrm{dcl}(a) = \{(0,0)\}$. Ако је $a = (0,1)$ или $a = (1,1)$, тада је $\mathrm{dcl}(a) = \{(0,0),(0,1),(1,1)\}$ јер можемо формулом да дефинишемо елемент који припада двочланој класи, а различит је од a. У осталим случајевима, $\mathrm{dcl}(a) = \{(0,0),a\}$. Детаље остављамо читаоцу.

$\mathrm{dcl}(a,b)$ зависи од елемената a и b. Можемо претпоставити да је $a \neq b$ (у супротном, проблем се своди на $\mathrm{dcl}(a)$). Дајемо решење, а детаље остављамо читаоцу:

$$\mathrm{dcl}(a,b) = \begin{cases} P_0 \cup P_1 \cup \{a,b\} & \text{ако } a \in P_1 \text{ или } b \in P_1; \\ P_0 \cup P_2 & \text{ако } a,b \in P_2; \\ P_0 \cup \{a,b\} & \text{иначе.} \end{cases}$$

(в) Претпоставимо да је S дефинабилан са параметрима $\bar{a} = a_1 \dots a_n$ (формула која дефинише S ,,користи" само коначно много параметара). Сви параметри се налазе у неких ,,првих" m класа. Приметимо да имамо аутоморфизам који фиксира ,,првих" m класа тачка-по-тачка, а остале класе произвољно пермутује (сваку посебно произвољно пермутује). Тај аутоморфизам фиксира све параметре, али не фиксира скуп S. Контрадикција. $\square$

5. Доказати да постоји модел теорије $\mathrm{Th}(\mathbb{A})$ који има бесконачну E-класу.

Решење. Посматрајмо језик $\mathcal{L} = \{E\} \cup \{c_i \mid i \in \mathbf{N}\}$ и $\mathcal{L}$-теорију:

$$T = \mathrm{Th}(\mathbb{A}) \cup \{c_i \neq c_j \mid i,j \in \mathbf{N},\ i \neq j\} \cup \{E(c_i,c_j) \mid i,j \in \mathbf{N}\}.$$

Ако је $\mathbb{M} \models T$, тада је редукт модела $\mathbb{M}$ на језик $\{E\}$ модел за $\mathrm{Th}(\mathbb{A})$ у коме интерпретације симбола c_i припадају некој бесконачној класи; дакле постоји бесконачна класа.

Према томе остаје да докажемо да T има модел. По теореми комактности довољно је да докажемо да свака коначна подтеорија од T има модел. Нека је $T_0' \subseteq T$ коначна и нека је $T_0 = \mathrm{Th}(\mathbb{A}) \cup T_0'$; довољно је да докажемо да T_0 има модел. T_0 ,,помиње" само коначно много c-ова, нпр. n њих. Тада можемо дефинисати експанзију модела $\mathbb{A}$ на језик $\mathcal{L}$ тако што те c-ове интерпретирамо као различите елементе n-точлане класе у $\mathbb{A}$, док остале c-ове можемо да интерпретирамо произвољно. Добијена експанзија је модел за T_0. $\square$

6. Доказати да теорија $\mathrm{Th}(\mathbb{B})$ има елиминацију квантификатора.

Решење. Докажимо најпре једну лему.

Лема. Нека је $\mathcal{L}$ неки језик и $\mathbb{M}$ модел језика $\mathcal{L}$. Нека је $\phi(x)$ формула језика $\mathcal{L}$ таква да $|\phi(\mathbb{M})| = n$. Нека је I коначан скуп индекса и $\phi^*((y_i)_{i\in I})$ формула која каже:

„Међу $(y_i)_{i\in I}$ има n различитих елемената скупа $\phi(\mathbb{M})$."

Формула $\phi^*((y_i)_{i\in I})$ се, до на $\phi(x)$, може записати без коришћења квантификатора. Прецизније, ако је $|I| < n$, тада је $\phi^*((y_i)_{i\in I}) = \bot$, а ако је $|I| \geq n$, тада је:

$$\phi^*((y_i)_{i\in I}) = \bigvee_{\substack{I_0\subseteq I\\ |I_0|=n}} \left(\bigwedge_{i\in I_0} \phi(y_i) \wedge \bigwedge_{\substack{i,j\in I_0\\ i\neq j}} y_i \neq y_j \right).$$

Доказ леме. Треба да докажемо да дата формула заиста описује жељену особину. Ако је $|I| < n$, тада међу изабраним елементима $(y_i)_{i\in I}$ не може бити n различитих, јер их укупно има мање од n. Дакле, заиста жељено својство описује формула $\bot$.

Претпоставимо сада да је $|I| \geq n$ и претпоставимо да нека валуација бира елементе $(y_i)_{i\in I}$. Тврдимо да међу њима има неких n различитих акко је дата формула $\phi^*((y_i)_{i\in I})$ тачна у тој валуацији.

Ако је $\phi^*((y_i)_{i\in I})$ тачна, то значи да је бар један њен дисјункт тачан, тј. постоји n-точлани подскуп $I_0 \subseteq I$ такав да је:

$$\bigwedge_{i\in I_0} \phi(y_i) \wedge \bigwedge_{\substack{i,j\in I_0\\ i\neq j}} y_i \neq y_j$$

тачна. Тада је јасно да је y_i, $i \in I_0$, n различитих елемената из скупа $\phi(\mathbb{M})$.

Обратно, нека међу $(y_i)_{i\in I}$ има n-различитих елемената скупа $\phi(\mathbb{M})$. Ако су то $y_{i_1}, ..., y_{i_n}$ и ако означимо $I_0 = \{i_1, \ldots, i_n\}$, тада је I_0 један n-точлани подскуп од I чији је одговарајући дисјункт у формули $\phi^*((y_i)_{i\in I})$ тачан, па је и цела дисјункција тачна. $\square$

Коментар. Формула $\neg\phi^*((y_i)_{i\in I})$ каже да међу $(y_i)_{i\in I}$ нема n различитих елемената скупа $\phi(\mathbb{M})$, и она је такође, до на ϕ, записана без квантификатора.

Вратимо се на решавање задатка. Познато нам је да је довољно да елиминшемо квантификатор у формули $\exists x\, \phi(x, \bar{y})$, где је $\phi(x, \bar{y})$ формула:

$$\bigwedge_{i\in I} x = y_i \wedge \bigwedge_{i\in J} x \neq y_i \wedge \bigwedge_{i\in K} E(x, y_i) \wedge \bigwedge_{i\in L} \neg E(x, y_i) \wedge \bigwedge_{i\in M} P_i(x) \wedge \bigwedge_{i\in N} \neg P_i(x).$$

Поступак изводимо у неколико корака.

1. корак. Ако је $I \neq \emptyset$ и $k \in I$, тада је $\exists x\, \phi(x, \bar{y})$ очигледно еквивалентна са бескванторном формулом $\phi(y_k, \bar{y})$. Дакле, можемо претпоставити да је $I = \emptyset$, тј. формула $\phi(x, \bar{y})$ је једнака:

$$\bigwedge_{i\in J} x \neq y_i \wedge \bigwedge_{i\in K} E(x, y_i) \wedge \bigwedge_{i\in L} \neg E(x, y_i) \wedge \bigwedge_{i\in M} P_i(x) \wedge \bigwedge_{i\in N} \neg P_i(x).$$

2. корак. Ако је $|M| \geq 2$, како су P-ови међусобно дисјунктни, $\exists x\, \phi(x, \bar{y})$ је очигледно еквивалентна са $\bot$. Дакле, можемо претпоставити да је $|M| \leq 1$.

3. корак. Ако је $M \cap N \neq \emptyset$, поново је $\exists x\, \phi(x, \bar{y})$ еквивалентна са $\bot$ јер се у њој јавља коњункција $P_k(x) \wedge \neg P_k(x)$, за неко k. Дакле, можемо претпоставити и да је $M \cap N = \emptyset$.

4. корак. Посматрајмо случај $K = M = \emptyset$, тј. формула $\phi(x, \bar{y})$ је облика:

$$\bigwedge_{i\in J} x \neq y_i \wedge \bigwedge_{i\in L} \neg E(x, y_i) \wedge \bigwedge_{i\in N} \neg P_i(x).$$

Тада је $\exists x\, \phi(x, \bar{y})$ еквивалентна са $\top$. Заиста, за произвољне $\bar{y}$ увек можемо изабрати x које је различито од неколико њих, није у класи са неколико њих и које није у неколико задатих класа, јер је тај скуп коначан, а модел бесконачан.

5. корак. Посматрајмо случај $M = \{m\}$, тј. формула $\phi(x, \bar{y})$ је:

$$\bigwedge_{i \in J} x \neq y_i \wedge \bigwedge_{i \in K} E(x, y_i) \wedge \bigwedge_{i \in L} \neg E(x, y_i) \wedge P_m(x) \wedge \bigwedge_{i \in N} \neg P_i(x).$$

Приметимо да је $\phi(x, \bar{y})$ еквивалентна са $\phi'(x, \bar{y})$:

$$\bigwedge_{i \in J} x \neq y_i \wedge \bigwedge_{i \in K} E(x, y_i) \wedge \bigwedge_{i \in L} \neg E(x, y_i) \wedge P_m(x).$$

Јасно $\phi(x, \bar{y})$ повлачи $\phi'(x, \bar{y})$. Али како $m \notin N$, то $P_m(x)$ повлачи $\bigwedge_{i \in N} \neg P_i(x)$, па и $\phi'(x, \bar{y})$ повлачи $\phi(x, \bar{y})$. Дакле, довољно је да елиминишемо квантификатор у $\exists\, x\, \phi'(x, \bar{y})$.

Приметимо даље да је $\phi'(x, \bar{y})$ еквивалентна са $\phi''(x, \bar{y})$:

$$\bigwedge_{i \in J} x \neq y_i \wedge \bigwedge_{i \in K} P_m(y_i) \wedge \bigwedge_{i \in L} \neg P_m(y_i) \wedge P_m(x).$$

Заиста, ако је $\phi'(x, \bar{y})$ тачна, тад је $P_m(\mathbb{B})$ класа елемента x, па како y_i, $i \in K$, јесу у релацији са x, то они припадају скупу $P_m(\mathbb{B})$, а како y_i, $i \in L$, нису у релацији са x, то они не припадају скупу $P_m(\mathbb{B})$. Из истог разлога $\phi''(x, \bar{y})$ повлачи $\phi'(x, \bar{y})$.

Сада смо свели проблем на елиминацију квантификатора у формули $\exists\, x\, \phi'''(x, \bar{y})$, где је $\phi'''(x, \bar{y})$ формула:

$$\bigwedge_{i \in J} x \neq y_i \wedge P_m(x).$$

Тврдимо да је $\exists\, x\, \phi'''(x, \bar{y})$ еквивалентна са $\neg P_m^*((y_i)_{i \in J})$, која према горњој леми каже да међу $(y_i)_{i \in J}$ нема $m+1$ различитих елемената скупа $P_m(\mathbb{B})$. Заиста, ако је $\exists\, x\, \phi'''(x, \bar{y})$ тачна, тада је x елемент скупа $P_m(\mathbb{B})$ који је различити од свих y_i, $i \in J$. Како је $P_m(\mathbb{B})$ $m+1$-точлан, то међу y_i, $i \in J$, не може бити $m+1$ различитих елемената скупа $P_m(\mathbb{B})$, јер би тада неки од њих морао бити једнак са x. Обратно, ако је $\neg P_m^*((y_i)_{i \in J})$ тачна, тада међу $(y_i)_{i \in J}$ нема $m+1$ различитих елмената скупа $P_m(\mathbb{B})$, па како је он $m+1$-точлан, можемо изабрати x у њему који је различит од свих y_i, $i \in J$, тј. $\exists\, x\, \phi'''(x, \bar{y})$ је тачна.

Дакле, $\exists\, x\, \phi'''(x, \bar{y})$ је еквивалентна са $\neg P_m^*((y_i)_{i \in J})$ која је бескванторна, и овај случај смо завршили.

<u>6. корак.</u> Остао нам је случај $K \neq \emptyset$ и $M = \emptyset$. Ако $k \in K$, тада је формула $\phi(x, \bar{y})$ једнака:

$$\bigwedge_{i \in J} x \neq y_i \wedge E(x, y_k) \wedge \bigwedge_{\substack{i \in K \\ i \neq k}} E(x, y_i) \wedge \bigwedge_{i \in L} \neg E(x, y_i) \wedge \bigwedge_{i \in N} \neg P_i(x).$$

Због чињенице да је E еквиваленција и да су јој P-ови класе, лако видимо да је $\phi(x, \bar{y})$ еквивалентна са формулом $\phi'(x, \bar{y})$:

$$\bigwedge_{i \in J} x \neq y_i \wedge E(x, y_k) \wedge \bigwedge_{\substack{i \in K \\ i \neq k}} E(y_k, y_i) \wedge \bigwedge_{i \in L} \neg E(y_k, y_i) \wedge \bigwedge_{i \in N} \neg P_i(y_k),$$

па смо свели проблем на елиминацију квантификатора у формули $\exists\, x\, \phi''(x, \bar{y})$, где је $\phi''(x, \bar{y})$:

$$\bigwedge_{i \in J} x \neq y_i \wedge E(x, y_k).$$

Нека је $|J| = n$. Тврдимо да је $\exists\, x\, \phi''(x, \bar{y})$ еквивалентна са бескванторном формулом:

$$\bigvee_{l=0}^{n-1} (\ P_l(y_k) \wedge \neg P_l^*((y_i)_{i \in J})\ ) \ \vee \ \bigwedge_{l=0}^{n-1} \neg P_l(y_k).$$

Претпоставимо да је $\exists\, x\, \phi''(x, \bar{y})$ тачна. Ако y_k не припада ниједној класи $P_l(\mathbb{B})$, $0 \leq l < n$, тада је последњи дисјункт у датој формули тачан. Претпоставимо да y_k припада $P_l(\mathbb{B})$, за неко $0 \leq l < n$. Елемент x тада припада истој класи $P_l(\mathbb{B})$, која има $l+1$ елемент, и различит је од свих y_i, $i \in J$. Зато међу y_i, $i \in J$, нема $j+1$ различитих елемената скупа $P_l(\mathbb{B})$, јер би у супротном x био једнак неком од њих. Дакле, дисјункт $P_l(y_k) \wedge \neg P_l^*((y_i)_{i \in J})$ је тачан.

Претпоставимо сада да је дата бескванторна формула тачна. Ако је тачан последњи дисјункт, који каже да y_k не припада класама $P_l(\mathbb{B})$, $0 \leq l < n$, тада y_k припада класи $P_t(\mathbb{B})$, за неко $t \geq n$, која има $t+1 \geq n+1$ елемената. Како y_i, $i \in J$, укупно има $|J| = n$, то сигурно у $P_t(\mathbb{B})$ можемо изабрати x које је различито од свих њих. Према томе, $\exists\, x\, \phi''(x, \bar{y})$ је тачна.

Претпоставимо сада да је тачан дисјункт $P_l(y_k) \wedge \neg P_l^*((y_i)_{i \in J})$, за неко $0 \leq l < n$. Тада y_k припада скупу $P_l(\mathbb{B})$ који има $l+1$ елемент, али такође међу $(y_i)_{i \in J}$ нема $l+1$ различитих елемената скупа $P_l(\mathbb{B})$. Према томе, опет можемо изабрати x у $P_l(\mathbb{B})$ који је различит од свих y_i, $i \in J$, тј. опет је формула $\exists x \, \phi''(x, \bar{y})$ тачна. $\square$