

1. а) Доказати да је $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\right]$ Еуклидски домен.

б) Наћи све елементе норме 9 прстена $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.

в) Наћи елемент прстена $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$ који је нерастављив, али није прост. Да ли је $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$ прстен са јединственом факторизацијом?

2. а) Наћи НЗД($6 + \sqrt{2}, 10 + 7\sqrt{2}$) у $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

б) У $\mathbb{Z}[i]$ решити систем конгруенција

$$x \equiv 1 + i \pmod{5 - 2i}$$

$$x \equiv 2 - i \pmod{4 - 3i}.$$

3. Наћи следеће аритметичке функције:

а) $f(n) = \sum_{d|n} \tau(d);$

б) $g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot f\left(\frac{n}{d}\right).$

($\tau(n)$ је број позитивних делилаца броја $n \in \mathbb{N}$, а μ Мебијусова функција.)

1. а) Доказати да је $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\right]$ Еуклидски домен.

б) Наћи све елементе норме 9 прстена $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.

в) Наћи елемент прстена $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$ који је нерастављив, али није прост. Да ли је $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$ прстен са јединственом факторизацијом?

2. а) Наћи НЗД($6 + \sqrt{2}, 10 + 7\sqrt{2}$) у $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

б) У $\mathbb{Z}[i]$ решити систем конгруенција

$$x \equiv 1 + i \pmod{5 - 2i}$$

$$x \equiv 2 - i \pmod{4 - 3i}.$$

3. Наћи следеће аритметичке функције:

а) $f(n) = \sum_{d|n} \tau(d);$

б) $g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot f\left(\frac{n}{d}\right).$

($\tau(n)$ је број позитивних делилаца броја $n \in \mathbb{N}$, а μ Мебијусова функција.)