Увод у математичку логику
Први колоквијум 2007/2008.

1 Одредити све нееквивалентне формуле A у којима се јављају слова p, q тако да формула:

$$((A \wedge q) \Rightarrow \neg p) \Rightarrow ((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg A)$$

буде таутологија.

Решење: Правимо таблицу:

	p	q	A	$((A$	$\wedge$	$q)$	$\Rightarrow$	$\neg p)$	$\Rightarrow$	$((p$	$\Rightarrow$	$\neg q)$	$\Rightarrow$	$\neg A)$
I_1	$\top$	$\top$	$I_1(A)$		$I_1(A)$		$\neg I_1(A)$	$\bot$	$\top$		$\bot$	$\bot$	$\top$	$\neg I_1(A)$
I_2	$\top$	$\bot$	$I_2(A)$		$\bot$		$\top$	$\bot$	$\neg I_2(A)$		$\top$	$\top$	$\neg I_2(A)$	$\neg I_2(A)$
I_3	$\bot$	$\top$	$I_3(A)$		$I_3(A)$		$\top$	$\top$	$\neg I_3(A)$		$\top$	$\bot$	$\neg I_3(A)$	$\neg I_3(A)$
I_4	$\bot$	$\bot$	$I_4(A)$		$\bot$		$\top$	$\top$	$\neg I_4(A)$		$\top$	$\top$	$\neg I_4(A)$	$\neg I_4(A)$

Да би формула била таутологија потребно је да $I_2(A) = I_3(A) = I_4(A) = \bot$. $I_1(A)$ може бити и тачно и нетачно. Према томе имамо две нееквивалентне формуле A_1, A_2 за које је дата формула таутологија, и оне су дате таблицом:

	p	q	A_1	A_2
I_1	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$
I_2	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
I_3	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
I_4	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$

Лако видимо да можемо узети $A_1 \equiv p \wedge q$, $A_2 \equiv \bot$. □

2 Нека су p, q исказна слова. Нека су дате формуле $A_0 = p$, $B_0 = (q \Rightarrow \neg p)$ и дефинишимо индуктивно:

$$A_n = (\neg A_{n-1} \Rightarrow B_{n-1}),\ B_n = (A_{n-1} \veebar B_{n-1}),\ n \geq 1.$$

Испитати за које $n \in \mathbb{N}$ су формуле A_n, B_n таутологије.

Решење: Како је $A_0 = p$, то формула A_0 није бити таутологија. Покажимо да све формуле A_n, $n \geq 1$, јесу таутологије. Показујемо индукцијом. Најпре претпоставимо да постоји интерпретација I тако да је $I(A_1) = \bot$. Тада је $I(\neg A_0 \Rightarrow B_0) = \bot$. Одатле мора бити $I(A_0) = \bot$ и $I(B_0) = \bot$, тј. $I(p) = \bot$ и $I(q \Rightarrow \neg p) = \bot$, одакле је $I(p) = \bot$, $I(q) = \top$ и $I(p) = \top$. Како ово није могуће, то претпостављена интерпретација не постоји, те је A_1 таутологија. Претпоставимо да је A_n таутологија. Тада за све интерпретације I важи $I(A_n) = \top$. Колико је $I(A_{n+1})$? $I(A_{n+1}) = I(\neg A_n \Rightarrow B_n) = \neg I(A_n) \Rightarrow I(B_n) = \bot \Rightarrow I(B_n) = \top$, па је према томе и A_{n+1} таутологија. Дакле, доказали смо да су формуле A_n, $n \geq 1$, таутологије.

За интерпретацију I_1: $I_1(p) = I_1(q) = \top$ имамо $I_1(A_0) = I_1(p) = \top$. Одавде и из првог дела задатка имамо да је $I_1(A_n) = \top$, за $n \geq 0$. Докажимо индукцијом да је $I_1(B_{2n}) = \bot$, $n \geq 0$, тј. да ниједна од формула B_{2n} није таутологија. $I_1(B_0) = I_1(q \Rightarrow \neg p) = \bot$. Претпоставимо сада да је $I_1(B_{2n}) = \bot$ и израчунајмо $I_1(B_{2n+2})$. $I_1(B_{2n+2}) = I_1(A_{2n+1} \veebar B_{2n+1}) = I_1(A_{2n+1}) \veebar I_1(B_{2n+1}) = I_1(A_{2n+1}) \veebar I_1(A_{2n} \veebar B_{2n}) = I_1(A_{2n+1}) \veebar (I_1(A_{2n}) \veebar I_1(B_{2n})) = \top \veebar (\top \veebar \bot) = \top \veebar \top = \bot$. Ово доказује да формуле B_{2n} нису таутологије.

За интерпретацију I_2: $I_2(p) = \top$, $I_2(q) = \bot$ имамо $I_2(A_0) = I_2(p) = \top$ и $I_2(B_0) = I_2(q \Rightarrow \neg p) = \top$. Покажимо да важи $I_2(B_{2n+1}) = \bot$, за $n \geq 0$. $I_2(B_1) = I_2(A_0 \veebar B_0) = \top \veebar \top = \bot$. Сада претпоставимо да је $I_2(B_{2n+1}) = \bot$ и израчунајмо $I_2(B_{2n+3})$. $I_2(B_{2n+3}) = I_2(A_{2n+2} \veebar B_{2n+2}) = I_2(A_{2n+2}) \veebar I_2(B_{2n+2}) = I_2(A_{2n+2}) \veebar I_2(A_{2n+1} \veebar B_{2n+1}) = I_2(A_{2n+2}) \veebar (I_2(A_{2n+1}) \veebar I_2(B_{2n+1})) = \top \veebar (\top \veebar \bot) = \top \veebar \top = \bot$. Ово доказује да ни формуле B_{2n+1} нису таутологије. □

3 Показати да у исказном рачуну важи:

$$\vdash A \Rightarrow (A \wedge A).$$

Решење: Ако покажемо $A \vdash A \wedge A$, то ће тражени резултати следити применом става дедукције. Зато покажимо $A \vdash A \wedge A$.

Како је $A \wedge B$ замена за $\neg(A \Rightarrow \neg B)$, то показујемо $A \vdash \neg(A \Rightarrow \neg A)$. Покажимо најпре $A \Rightarrow \neg A \vdash \neg A$. Изводимо:

(1)	хипотеза	$A \Rightarrow \neg A$
(2)	теорема	$A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg(A \Rightarrow A))$
(3)	Ax.2	$(A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg(A \Rightarrow A))) \Rightarrow ((A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg(A \Rightarrow A)))$
(4)	МП(2,3)	$(A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg(A \Rightarrow A))$
(5)	МП(1,4)	$A \Rightarrow \neg(A \Rightarrow A)$
(6)	теорема	$(A \Rightarrow \neg(A \Rightarrow A)) \Rightarrow (\neg\neg(A \Rightarrow A) \Rightarrow \neg A)$
(7)	МП(5,6)	$\neg\neg(A \Rightarrow A) \Rightarrow \neg A$
(8)	теорема	$(A \Rightarrow A) \Rightarrow \neg\neg(A \Rightarrow A)$
(9)	извођење(7,8)	$(A \Rightarrow A) \Rightarrow \neg A$
(10)	теорема	$A \Rightarrow A$
(11)	МП(9,10)	$\neg A$

Дакле, показали смо $A \Rightarrow \neg A \vdash \neg A$. Одавде према ставу дедукције изводимо $\vdash (A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow \neg A$. Покажимо коначно $A \vdash \neg(A \Rightarrow \neg A)$. Изводимо:

(1)	хипотеза	A
(2)	теорема	$(A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow \neg A$
(3)	теорема	$((A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow \neg(A \Rightarrow \neg A))$
(4)	МП(2,3)	$\neg\neg A \Rightarrow \neg(A \Rightarrow \neg A)$
(5)	теорема	$A \Rightarrow \neg\neg A$
(6)	извођење(4,5)	$A \Rightarrow \neg(A \Rightarrow \neg A)$
(7)	МП(1,6)	$\neg(A \Rightarrow \neg A)$

Дакле, $A \vdash \neg(A \Rightarrow \neg A)$, па према ставу дедукције $\vdash A \Rightarrow \neg(A \Rightarrow \neg A)$, тј. $\vdash A \Rightarrow (A \wedge A)$. $\square$

4 Методом резолуције показати ваљаност формуле:

$$((q \wedge r) \vee \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \wedge r)).$$

Решење: Нека је $A = ((q \wedge r) \vee \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \wedge r))$. Нађимо КНФ формуле $\neg A$. $\neg A = \neg(((q \wedge r) \vee \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \wedge r))) = ((q \wedge r) \vee \neg p) \wedge \neg(p \Rightarrow (q \wedge r)) = (q \vee \neg p) \wedge (r \vee \neg p) \wedge (p \wedge \neg(q \wedge r)) = (q \vee \neg p) \wedge (r \vee \neg p) \wedge p \wedge (\neg q \vee \neg r)$. Сад имамо:

$C_1 = \{q,\ \neg p\}$	
$C_2 = \{r,\ \neg p\}$	
$C_3 = \{p\}$	
$C_4 = \{\neg q,\ \neg r\}$	
$C_5 = \{q\}$	$Res(C_1,\ C_3,\ \neg p,\ p)$
$C_6 = \{r\}$	$Res(C_2,\ C_3,\ \neg p,\ p)$
$C_7 = \{\neg r\}$	$Res(C_4,\ C_5,\ \neg q,\ q)$
$C_8 = \emptyset$	$Res(C_6,\ C_7,\ r,\ \neg r)$

Како смо добили празну клаузу, то је формула $\neg A$ контрадикција, па је A таутологија. $\square$

5 Методом таблоа показати ваљаност формуле:

$$((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)).$$

Решење:

$$\begin{array}{c}
1.\ \mathcal{F}\ ((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \\
| \\
2.(1)\ \mathcal{T}\ (p \wedge q) \Rightarrow r \\
| \\
3.(1)\ \mathcal{F}\ p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \\
| \\
4.(3)\ \mathcal{T}\ p \\
| \\
5.(3)\ \mathcal{F}\ q \Rightarrow r \\
| \\
6.(5)\ \mathcal{T}\ q \\
| \\
7.(5)\ \mathcal{F}\ r \\
\swarrow \qquad\qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
8.(2)\ \mathcal{F}\ p \wedge q \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
10.(8)\ \mathcal{F}\ p & 11.(8)\ \mathcal{F}\ p \\
| & | \\
\times(4,\ 10) & \times(6,\ 11)
\end{array}
\end{array}
&
\begin{array}{c}
9.(2)\ \mathcal{T}\ r \\
| \\
\times(7,\ 9)
\end{array}
\end{array}
\end{array}$$

Како су све гране таблоа затворене, то је он доказ за дату формулу, те је она таутологија. $\square$

Славко Моцоња
slavkomm@gmail.com
http://www.matf.bg.ac.yu/∼slavko