Увод у математичку логику
Други колоквијум 2007/2008.

1 Показати да у Буловој алгебри за све x, y важи:

$$x = 1 \text{ ако и само ако } y = (x \vee y') \wedge (x' \vee y).$$

Решење: (⇒) $(x \vee y') \wedge (x' \vee y) = (1 \vee y') \wedge (1' \vee y) = 1 \wedge (0 \vee y) = 1 \wedge y = y$.
(⇐) Покажимо најпре помоћно тврђење.

Лема Ако је $x \vee y = x \vee y'$, онда је $x = 1$.
Доказ: Имамо најпре $x \vee y = x \vee (y \vee y) = (x \vee y) \vee y = (x \vee y') \vee y = v \vee (y' \vee y) = x \vee 1 = 1$. Дакле $x \vee y = x \vee y' = 1$. Сада добијамо $x = x \vee 0 = x \vee (y \wedge y') = (x \vee y) \wedge (x \vee y') = 1 \wedge 1 = 1$. ■

Уочимо $x \vee y = x \vee ((x \vee y') \wedge (x' \vee y)) = (x \vee x \vee y') \wedge (x \vee x' \vee y) = (x \vee y') \wedge 1 = x \vee y'$, па је према леми $x = 1$. □

2 По дефиницији показати да је формула ваљана:

$$(\forall x)(p(x) \Rightarrow q(x)) \Rightarrow ((\exists x)p(x) \Rightarrow (\exists x)q(x)).$$

Решење: Претпоставимо супротно да формула није ваљана. Тада постоји структура $\mathbb{D} = (D, I^L)$ и валуација $v : Var \to D$, тако да је $I_v((\forall x)(p(x) \Rightarrow q(x)) \Rightarrow ((\exists x)p(x) \Rightarrow (\exists x)q(x))) = \bot$. Тада је:

$$(1)\ I_v((\forall x)(p(x) \Rightarrow q(x))) = \top \quad \text{и} \quad (2)\ I_v((\exists x)p(x) \Rightarrow (\exists x)q(x)) = \bot.$$

Из (2) закључујемо: (3) $I_v((\exists x)p(x)) = \top$ и (4) $I_v((\exists x)q(x)) = \bot$. Даље. из (3) закључујемо да постоји валуација $v' \sim_x v$, тако да је (5) $I_{v'}(p(x)) = \top$, а из (4) да за све валуације $u \sim_x v$ (6) $I_u(q(x)) = \bot$. Специјално, из (6) важи (7) $I_{v'}(q(x)) = \bot$, јер можемо узети $u = v'$. Сада је из (5) и (7): (8) $I_{v'}(p(x) \Rightarrow q(x)) = \bot$.

Из (1) закључујемо да за све валуације $w \sim_x v$ важи (9) $I_w(p(x) \Rightarrow q(x)) = \top$. Специјално, из (9) важи (10) $I_{v'}(p(x) \Rightarrow q(x)) = \top$, јер можемо узети $w = v'$. Коначно, (10) и (8) су у контрадикцији.

Дакле, полазна формула је ваљана. □

3 Наћи трочлани модел и контрамодел за формулу:

$$(\forall x)(\exists y)\left(p\left(f(x,y),c\right) \Rightarrow p\left(c, f(x,y)\right)\right).$$

Решење: Нека је F дата формула и узмимо скуп $D = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Посматрајмо структуру $\mathbb{D}_1 = (D, I^L)$, $I^L(p) = p_I$, $I^L(f) = f_I$, $I^L(c) = c_I$, где је:

p_I	α	β	γ
α	$\bot$		
β			
γ			

f_I	α	β	γ
α	α		
β	α		
γ	α		

$c_I = \alpha$[1]

Покажимо да је $\mathbb{D}_1 \vDash F$. Претпоставимо супротно, да постоји валуација $v : Var \to D$, тако да је $I_v(F) = \bot$. Тада постоји валуација $v' \sim_x v$ тако да је $I_{v'}((\exists y)(p(f(x,y),c) \Rightarrow p(c, f(x,y)))) = \bot$. Нека је $v'(x) = a \in D$. Даље, за све валуације $u \sim_y v'$ важи $I_u(p(f(x,y),c) \Rightarrow p(c, f(x,y)))$, и одатле је $I_u(p(f(x,y),c)) = \top$, $I_u(p(c, f(x,y))) = \bot$. Узмимо да је $u(y) = \alpha$ и имамо $u(x) = v'(x) = a$. Из прве релације имамо $p_I(f_I(u(x), u(y)), c_I) = \top$, тј. $p_I(f_I(a, \alpha), \alpha) = \top$. Како је $f_I(a, \alpha) = \alpha$, то добијамо $p_I(\alpha, \alpha) = \top$, што је контрадикција. Следи, $\mathbb{D}_1 \vDash F$.

Посматрајмо структуру $\mathbb{D}_2 = (D, I^L)$, $I^L(p) = p_I$, $I^L(f) = f_I$, $I^L(c) = c_I$, где је:

p_I	α	β	γ
α		$\bot$	
β	$\top$		
γ			

f_I	α	β	γ
α	β	β	β
β			
γ			

$c_I = \alpha$[2].

Покажимо да је $\mathbb{D}_2 \nvDash F$. Претпоставимо супротно, да за све валуације $v : Var \to D$ важи $I_v(F) = \top$. Тада за све валуације $u \sim_x v$ важи $I_u((\exists y)(p(f(x,y),c) \Rightarrow p(c, f(x,y)))) = \top$. Узмимо $u(x) = \alpha$. Даље, постоји валуација $v' \sim_y u$, тако да је $I_{v'}(p(f(x,y),c) \Rightarrow p(c, f(x,y))) = \top$. Нека је $v'(y) = a \in D$ и умамо $v'(x) = u(x) = \alpha$. Раздвајамо два случаја.

1° Претпоставимо да је $I_{v'}(p(f(x,y),c)) = \bot$. То значи $p_I(f_I(\alpha, a), \alpha) = \bot$. Како је $f_I(\alpha, a) = \beta$, то значи $p_I(\beta, \alpha) = \bot$, што је контрадикција.

2° Претпоставимо да је $I_{v'}(p(c, f(x,y))) = \top$. То значи $p_I(\alpha, f_I(\alpha, a)) = \top$. Како је $f_I(\alpha, a) = \beta$, то значи $p_I(\alpha, \beta) = \top$, што је контрадикција.

Како ниједан случај није могућ, то је $\mathbb{D}_2 \nvDash F$. □

---

[1] Ради бољег разумевања таблица је попуњена само неопходним подацима, док остали уноси нису битни. Да би задатак био коректан, неопходно је попунити остатак табела, а то можемо учинити на више начина.

[2] Иста напомена.

4 Методом таблоа показати да је формула ваљана:

$$(\forall x)(p(x) \wedge (\forall y)q(x,y)) \Leftrightarrow (\forall x)p(x) \wedge (\forall y)(\forall x)q(x,y).$$

Решење:

$$\begin{array}{c}
1.\ \mathcal{F}(\forall x)(p(x) \wedge (\forall y)q(x,y)) \Leftrightarrow (\forall x)p(x) \wedge (\forall y)(\forall x)q(x,y) \\
\begin{array}{cc}
/ & \backslash \\
\begin{array}[t]{c}
2.(1)\ \mathcal{F}(\forall x)(p(x) \wedge (\forall y)q(x,y)) \\
3.(1)\ \mathcal{T}(\forall x)p(x) \wedge (\forall y)(\forall x)q(x,y) \\
6.(2)\ \mathcal{F}p(a) \wedge (\forall y)q(a,y) \\
7^{\star}.(3)\ \mathcal{T}(\forall x)p(x) \\
8^{\star}.(3)\ \mathcal{T}(\forall y)(\forall x)q(x,y) \\
9.(7)\ \mathcal{T}p(a) \\
\begin{array}{cc}
/ & \backslash \\
\begin{array}[t]{c}
10.(6)\ \mathcal{F}p(a) \\
\times(9,10)
\end{array} &
\begin{array}[t]{c}
11.(6)\ \mathcal{F}(\forall y)q(a,y) \\
12.(11)\ \mathcal{F}q(a,b) \\
13^{\star}.(8)\ \mathcal{T}(\forall x)q(x,b) \\
14.(13)\ \mathcal{T}q(a,b) \\
\times(12,14)
\end{array}
\end{array}
\end{array} &
\begin{array}[t]{c}
4^{\star}.(1)\ \mathcal{T}(\forall x)(p(x) \wedge (\forall y)q(x,y)) \\
5.(1)\ \mathcal{F}(\forall x)p(x) \wedge (\forall y)(\forall x)q(x,y) \\
\begin{array}{cc}
/ & \backslash \\
\begin{array}[t]{c}
15.(5)\ \mathcal{F}(\forall x)p(x) \\
17.(15)\ \mathcal{F}p(c) \\
18.(4)\ \mathcal{T}p(c) \wedge (\forall y)q(c,y) \\
19.(18)\ \mathcal{T}p(c) \\
20^{\star}.(18)\ \mathcal{T}(\forall y)q(c,y) \\
\times(17,19)
\end{array} &
\begin{array}[t]{c}
16.(5)\ \mathcal{F}(\forall y)(\forall x)q(x,y) \\
21.(16)\ \mathcal{F}(\forall x)q(x,d) \\
22.(21)\ \mathcal{F}q(e,d) \\
23.(4)\ \mathcal{T}p(e) \wedge (\forall y)q(e,y) \\
24.(23)\ \mathcal{T}p(e) \\
25^{\star}.(23)\ \mathcal{T}(\forall y)q(e,y) \\
26.(25)\ \mathcal{T}q(e,d) \\
\times(22,26)
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}$$

Како су све гране таблоа затворене, то је полазна формула ваљана. ☐

5 Методом резолуције показати да је $H \wedge K \Rightarrow L$ ваљана формула, где је:

$$\begin{array}{l}
H = (\forall x)((\exists y)p(x,y) \Rightarrow \neg(\forall y)p(x,y)), \\
K = (\forall x)((\forall y)p(y,x) \Rightarrow (\exists y)p(x,y)), \\
L = (\forall x)((\forall y)p(y,x) \Rightarrow \neg(\forall y)p(x,y)).
\end{array}$$

Решење: Нека је $F = H \wedge K \Rightarrow L$. Тада је $\neg F = H \wedge K \wedge \neg L =$
$= (\forall x)((\exists y)p(x,y) \Rightarrow \neg(\forall y)p(x,y)) \wedge (\forall x)((\forall y)p(y,x) \Rightarrow (\exists y)p(x,y)) \wedge \neg(\forall x)((\forall y)p(y,x) \Rightarrow \neg(\forall y)p(x,y)) =$
$= (\forall x)(\neg(\exists y)p(x,y) \vee \neg(\forall y)p(x,y)) \wedge (\forall x)(\neg(\forall y)p(y,x) \vee (\exists y)p(x,y)) \wedge (\exists x)\neg(\neg(\forall y)p(y,x) \vee \neg(\forall y)p(x,y)) =$
$= (\exists x)[(\forall x)((\forall y)\neg p(x,y) \vee (\exists y)\neg p(x,y)) \wedge (\forall x)((\exists y)\neg p(y,x) \vee (\exists y)p(x,y)) \wedge ((\forall y)p(y,x) \wedge (\forall y)p(x,y))] =$
$= (\exists x)[(\forall z)((\forall y)\neg p(z,y) \vee (\exists y)\neg p(z,y)) \wedge (\forall z)((\exists y)\neg p(y,z) \vee (\exists y)p(z,y)) \wedge (\forall z)p(z,x) \wedge (\forall z)p(x,z)] =$
$= (\exists x)(\forall z)[((\forall y)\neg p(z,y) \vee (\exists y)\neg p(z,y)) \wedge ((\exists y)\neg p(y,z) \vee (\exists y)p(z,y)) \wedge p(z,x) \wedge p(x,z)] =$
$= (\exists x)(\forall z)[((\forall u)\neg p(z,u) \vee (\exists y)\neg p(z,y)) \wedge ((\exists v)\neg p(v,z) \vee (\exists v)p(z,v)) \wedge p(z,x) \wedge p(x,z)] =$
$= (\exists x)(\forall z)[(\exists y)(\forall u)(\neg p(z,u) \vee \neg p(z,y)) \wedge (\exists v)(\neg p(v,z) \vee p(z,v)) \wedge p(z,x) \wedge p(x,z)] =$
$= (\exists x)(\forall z)(\exists y)(\exists v)(\forall u)[(\neg p(z,u) \vee \neg p(z,y)) \wedge (\neg p(v,z) \vee p(z,v)) \wedge p(z,x) \wedge p(x,z)]$.

Извршимо сколемизацију $x \mapsto a$, $y \mapsto f(z)$, $v \mapsto g(z)$, и добијамо клаузалну форму G формуле $\neg F$: $G = (\forall z)(\forall u)[(\neg p(z,u) \vee \neg p(z,f(z))) \wedge (\neg p(g(z),z) \vee p(z,g(z))) \wedge p(z,a) \wedge p(a,z)]$. Формула $\neg F$ је задовољива ако и само ако је задовољива формула G. Показујемо да G није задовољива методом резолуције.

$$\begin{array}{lll}
C_1 = \{\neg p(z_1,u_1), \neg p(z_1,f(z_1))\} & & \\
C_2 = \{\neg p(g(z_2),z_2), p(z_2,g(z_2))\} & & \\
C_3 = \{p(z_3,a)\} & & \\
C_4 = \{p(a,z_4)\} & & \\
\hline
C_5 = \{p(a,g(a))\} & Res(C_2,C_3,1,1) & [z_2 \mapsto a, z_3 \mapsto g(a)] \\
C_6 = \{\neg p(a,f(a))\} & Res(C_1,C_5,1,1) & [z_1 \mapsto a, u_1 \mapsto g(a)] \\
C_7 = \emptyset & Res(C_4,C_6,1,1) & [z_4 \mapsto f(a)]
\end{array}$$

Како смо добили празну клаузу, G је незадовољива, па је и $\neg F$ незадовољива, одакле је F ваљана. ☐

Славко Моцоња
slavkomm@gmail.com
http://www.matf.bg.ac.yu/~slavko