Увод у математичку логику, други колоквијум 2010/2011. *15. јануар 2011.*

1. Доказати да у свакој Буловој алгебри важи: $x \vee y' \leq x \wedge y$ ако и само ако $y = 1$.
2. Доказати да у Хилбертовом исказном рачуну важи: $\vdash (\neg A \Rightarrow A) \vee \neg A$.
3. Одредити све нееквивалентне формуле A које садрже само слова p, q и r тако да је следећа формула таутологија: $((p \wedge q) \Leftrightarrow A) \Rightarrow (q \wedge r)$.
4. Дат је језик првог реда $\mathcal{L}$: $\mathrm{Const}\,\mathcal{L} = \{c\}$, $\mathrm{Fun}\,\mathcal{L} = \{f, g\}$, $\mathrm{Rel}\,\mathcal{L} = \{p, q\}$, $\mathrm{ar}(f) = \mathrm{ar}(q) = 1$, $\mathrm{ar}(g) = \mathrm{ar}(p) = 2$.

   Дат је модел $\mathbb{M} = (\mathsf{N}, I^{\mathcal{L}})$ језика $\mathcal{L}$: $c^{\mathbb{M}} = 2$, $f^{\mathbb{M}}(m) = 2m + 1$, $g^{\mathbb{M}}(m, n) = mn + 1$, $p^{\mathbb{M}} =$„ | ”, $q^{\mathbb{M}} =$„је прост”.

   Дата је валуација $v : \mathrm{Var} \to \mathsf{N}$: $v = \begin{pmatrix} x & y & \cdots \\ 3 & 6 & \cdots \end{pmatrix}$.

   а) Одредити вредности следећих терма у валуацији v: $f(g(c, x))$, $g(f(c), f(y))$, $g(g(c, x), g(y, c))$, $f(g(f(y), f(x)))$, $f(f(y))$.

   б) Одредити тачност следећих формула у валуацији v: $q(g(x, y))$, $p(x, g(c, y)) \Rightarrow q(c)$, $\exists y\, p(c, f(y))$, $\exists x\, p(x, g(x, y))$, $\exists x\, \forall y\, p(f(x), g(c, y))$.

   в) Доказати: $\mathbb{M} \models p(c, f(y)) \vee \exists x\, \neg p(x, g(x, y)))$.

   г) Доказати: $\mathbb{M} \not\models q(y) \Rightarrow \forall y\, q(g(x, y))$.
5. Методом таблоа доказати да је следећа формула ваљана:

$$\big(\exists y\, p(a, y) \vee \forall x\, q(x, x)\big) \wedge \forall x\, \exists y\, \neg q(x, y) \Rightarrow \exists x\, \exists y\, p(x, y) \vee \forall x\, \big(q(x, x) \wedge \neg \forall y\, q(x, y)\big).$$

Увод у математичку логику, други колоквијум 2010/2011. *15. јануар 2011.*

1. Доказати да у свакој Буловој алгебри важи: $x \vee y \leq x \wedge y'$ ако и само ако $y = 0$.
2. Доказати да у Хилбертовом исказном рачуну важи: $\vdash (A \Rightarrow \neg A) \vee A$.
3. Одредити све нееквивалентне формуле A које садрже само слова p, q и r тако да је следећа формула таутологија: $(p \vee q) \Rightarrow (A \Leftrightarrow (q \vee r))$.
4. Дат је језик првог реда $\mathcal{L}$: $\mathrm{Const}\,\mathcal{L} = \{c\}$, $\mathrm{Fun}\,\mathcal{L} = \{f, g\}$, $\mathrm{Rel}\,\mathcal{L} = \{p, q\}$, $\mathrm{ar}(f) = \mathrm{ar}(q) = 1$, $\mathrm{ar}(g) = \mathrm{ar}(p) = 2$.

   Дат је модел $\mathbb{M} = (\mathsf{N}, I^{\mathcal{L}})$ језика $\mathcal{L}$: $c^{\mathbb{M}} = 3$, $f^{\mathbb{M}}(m) = 3m + 1$, $g^{\mathbb{M}}(m, n) = mn + 1$, $p^{\mathbb{M}} =$„ | ”, $q^{\mathbb{M}} =$„није прост”.

   Дата је валуација $v : \mathrm{Var} \to \mathsf{N}$: $v = \begin{pmatrix} x & y & \cdots \\ 2 & 6 & \cdots \end{pmatrix}$.

   а) Одредити вредности следећих терма у валуацији v: $f(g(c, x))$, $g(f(c), f(y))$, $g(g(c, x), g(y, c))$, $f(g(f(y), f(x)))$, $f(f(y))$.

   б) Одредити тачност следећих формула у валуацији v: $q(g(x, y))$, $p(x, g(c, y)) \Rightarrow q(c)$, $\exists y\, p(c, f(y))$, $\exists x\, p(x, g(x, y))$, $\exists x\, \forall y\, p(f(x), g(c, y))$.

   в) Доказати: $\mathbb{M} \models p(c, f(y)) \vee \exists x\, \neg p(x, g(x, y)))$.

   г) Доказати: $\mathbb{M} \not\models q(y) \Rightarrow \forall y\, q(g(x, y))$.
5. Методом таблоа доказати да је следећа формула ваљана:

$$\big(\forall y\, p(a, y) \vee \forall x\, q(x, x)\big) \wedge \forall x\, \exists y\, \neg q(y, x) \Rightarrow \exists x\, \forall y\, p(x, y) \vee \forall x\, \big(q(x, x) \wedge \neg \forall y\, q(y, x)\big).$$