1 Низови формула A_n, B_n, C_n задати су са: $A_0 = p$, $A_n = B_{n-1} \Rightarrow C_{n-1}$, $n \geq 1$; $B_0 = \neg p$, $B_n = C_{n-1} \Rightarrow A_{n-1}$, $n \geq 1$; $C_0 = p \Rightarrow p$, $C_n = A_{n-1} \Rightarrow B_{n-1}$, $n \geq 1$. Испитати који чланови низова A_n, B_n, C_n су таутологије, а који контрадикције.

Решење: Уочимо $A_0 = p$, $B_0 = \neg p$, $C_0 = p \Rightarrow p$ и јасно A_0, B_0 нису ни таутологије ни контрадикције, док C_0 јесте таутологија. Даље је, $A_1 = B_0 \Rightarrow C_0 = p \Rightarrow (p \Rightarrow p) \equiv p \Rightarrow p$, $B_1 = C_0 \Rightarrow A_0 = (p \Rightarrow p) \Rightarrow p \equiv p$, $C_1 = A_0 \Rightarrow B_0 = p \Rightarrow \neg p \equiv \neg p$; $A_2 = B_1 \Rightarrow C_1 = p \Rightarrow \neg p \equiv \neg p$, $B_2 = C_1 \Rightarrow A_1 = \neg p \Rightarrow (p \Rightarrow p) \equiv p \Rightarrow p$, $C_2 = A_1 \Rightarrow B_1 = (p \Rightarrow p) \Rightarrow p \equiv p$. Индукцијом се лако показује $A_{3k} \equiv B_{3k+1} \equiv C_{3k+2} \equiv p$, $A_{3k+1} \equiv B_{3k+2} \equiv C_{3k} \equiv p \Rightarrow p$ и $A_{3k+2} \equiv B_{3k} \equiv C_{3k+1} \equiv \neg p$. (Треба показати!!) Одавде закључујемо да су само формуле A_{3k+1}, B_{3k+2}, C_{3k}, $k \geq 0$ таутологије. Преостале формуле нису ни таутологије ни контрадикције. $\square$

2 Показати да у исказном рачуну важи: $A \wedge (B \wedge C) \vdash C$.

Решење: Покажимо $A \wedge B \vdash B$, тј. $\neg(A \Rightarrow \neg B) \vdash B$. Имамо:

1.	Аксиома 1	$\neg B \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B)$
2.	Теорема	$(\neg B \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B)) \Rightarrow (\neg(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg\neg B)$
3.	МП(1,2)	$\neg(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg\neg B$
4.	Хипотеза	$\neg(A \Rightarrow \neg B)$
5.	МП(3,4)	$\neg\neg B$
6.	Теорема	$\neg\neg B \Rightarrow B$
7.	МП(5,6)	B

Одавде, $A \wedge (B \wedge C) \vdash B \wedge C$, а $B \wedge C \vdash C$, одакле коначно $A \wedge (B \wedge C) \vdash C$. $\square$

3 Ако у Буловој алгебри важи $p \wedge q = p \wedge r$ и $p \vee q = p \vee r$, онда је $q \wedge r' = 0$. Показати.

Решење: Приметимо да је по закону апсорбције $q = q \wedge (p \vee q) = q \wedge (p \vee r) = (q \wedge p) \vee (q \wedge r) = (p \wedge r) \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge r = (p \vee r) \wedge r = r$, одакле је $q \wedge r' = q \wedge q' = 0$. $\square$

4 За формулу $F \equiv \forall x \forall y \forall z((p(x,y) \wedge p(y,z)) \Rightarrow p(z,x))$ наћи модел и контрамодел коначног домена.

Решење:

Модел: Посматрајмо скуп $D_1 = \{a\}$ и структуру $\mathbb{D}_1 = (D_1, I^L)$, $I^L(p) = p_I$, где је $p_I(a,a) = \top$. Покажимо $\mathbb{D}_1 \models F$. Претпоставимо супротно да постоји валуација $v : Var \to D_1$ за коју важи $I_v(F) = \bot$. Тада постоји валуација $v' \sim_x v$ за коју важи $I_{v'}(\forall y \forall z((p(x,y) \wedge p(y,z)) \Rightarrow p(z,x))) = \bot$. Мора $v'(x) = a$. Даље, постоји валуација $v'' \sim_y v'$ за коју важи $I_{v''}(\forall z((p(x,y) \wedge p(y,z)) \Rightarrow p(z,x))) = \bot$. Јасно $v''(x) = v'(x) = a$ и мора $v''(y) = a$. Даље, постоји валуација $v''' \sim_z v''$ за коју важи $I_{v'''}((p(x,y) \wedge p(y,z)) \Rightarrow p(z,x)) = \bot$. Јасно, $v'''(x) = x''(x) = a$, $v'''(y) = v''(y) = a$ и мора $v'''(z) = a$. Тада добијамо $p_I(a,a) \wedge p_I(a,a) \Rightarrow p_I(a,a) = \bot$, тј. $\top \wedge \top \Rightarrow \top = \bot$ или $\top \Rightarrow \top = \bot$. Контрадикција. Следи $\mathbb{D}_1 \models F$.

Контрамодел: Посматрајмо скуп $D_2 = \{a, b\}$ и структуру $\mathbb{D}_2 = (D_2, I^L)$, $I^L(p) = p_I$, где је $p_I(a,a) = \top$, $p_I(a,b) = \top$, $p_I(b,a) = \bot$, $p_I(b,b) = \bot$. Покажимо $\mathbb{D}_2 \not\models F$. Претпоставимо супротно да за све валуације $v : Var \to \mathbb{N}$ важи $I_v(F) = \top$. Тада за све валуације $v' \sim_x v$ важи $I_{v'}(\forall y \forall z((p(x,y) \wedge p(y,z)) \Rightarrow p(z,x))) = \top$. Узмимо $v'(x) = a$. Даље, за све валуације $v'' \sim_y v'$ важи $I_{v''}(\forall z((p(x,y) \wedge p(y,z)) \Rightarrow p(z,x))) = \top$. Јасно $v''(x) = v'(x) = a$ и узмимо $v''(y) = a$. Даље, за све валуације $v''' \sim_z v''$ важи $I_{v'''}((p(x,y) \wedge p(y,z)) \Rightarrow p(z,x)) = \top$. Јасно, $v'''(x) = x''(x) = a$, $v'''(y) = v''(y) = a$ и узмимо $v'''(z) = b$. Тада добијамо $p_I(a,a) \wedge p_I(a,b) \Rightarrow p_I(b,a) = \top$, тј. $\top \wedge \top \Rightarrow \bot = \top$ или $\top \Rightarrow \bot = \top$. Контрадикција. Следи $\mathbb{D}_2 \not\models F$. $\square$

5 Методом таблоа показати да је формула $(\forall x\exists y(p(x,y)\Rightarrow\exists zq(x,z))\wedge\forall x\forall yp(x,y))\Rightarrow\forall x\exists zq(x,z)$ ваљана.

Решење:

$$
\begin{array}{c}
1.\ \mathcal{F}(\forall x\exists y(p(x,y)\Rightarrow\exists zq(x,z))\wedge\forall x\forall yp(x,y))\Rightarrow\forall x\exists zq(x,z)\\
2.(1)\ \mathcal{T}\forall x\exists y(p(x,y)\Rightarrow\exists zq(x,z))\wedge\forall x\forall yp(x,y)\\
3.(1)\ \mathcal{F}\forall x\exists zq(x,z)\\
4^\star.(2)\ \mathcal{T}\forall x\exists y(p(x,y)\Rightarrow\exists zq(x,z))\\
5^\star.(2)\ \mathcal{T}\forall x\forall yp(x,y)\\
6^\star.(3)\ \mathcal{F}\exists zq(a,z)\\
7.(4)\ \mathcal{T}\exists y(p(a,y)\Rightarrow\exists zq(a,z))\\
8^\star.(5)\ \mathcal{T}\forall yp(a,y)\\
9.(7)\ \mathcal{T}p(a,b)\Rightarrow\exists zq(a,z)\\
10.(8)\ \mathcal{T}p(a,b)
\end{array}
$$

$11.(9)\ \mathcal{F}p(a,b)$	$12.(9)\ \mathcal{T}\exists zq(a,z)$
$\times(10{,}11)$	$13.(12)\ \mathcal{T}q(a,c)$
	$14.(6)\ \mathcal{F}q(a,c)$
	$\times(13{,}14)$

Како су све гране таблоа затворене, то је формула ваљана. □

6 Методом резолуције показати да је формула $H\wedge K\Rightarrow L$ ваљана:

$$
\begin{array}{l}
H=\forall x\forall y(p(x,y)\Rightarrow\exists z(q(x,y,z)\vee r(x,z,y))),\\
K=\exists x\exists y\forall z\neg r(x,z,y),\\
L=\forall x\forall yp(x,y)\Rightarrow\exists x\exists y\exists zq(x,y,z).
\end{array}
$$

Решење: Представљамо $\neg F=H\wedge K\wedge\neg L$ у пренекс нормалној форми. Имамо:

$$
\begin{array}{l}
\neg F=H\wedge K\wedge\neg L=\forall x\forall y(p(x,y)\Rightarrow\exists z(q(x,y,z)\vee r(x,z,y)))\wedge\exists x\exists y\forall z\neg r(x,z,y)\wedge\neg(\forall x\forall yp(x,y)\Rightarrow\exists x\exists y\exists zq(x,y,z))=\\
=\forall x\forall y(\neg p(x,y)\vee\exists z(q(x,y,z)\vee r(x,z,y)))\wedge\exists x\exists y\forall z\neg r(x,z,y)\wedge\neg(\neg\forall x\forall yp(x,y)\vee\exists x\exists y\exists zq(x,y,z))=\\
=\forall x\forall y\exists z(\neg p(x,y)\vee q(x,y,z)\vee r(x,z,y))\wedge\exists x\exists y\forall z\neg r(x,z,y)\wedge\forall x\forall yp(x,y)\wedge\forall x\forall y\forall z\neg q(x,y,z)=\\
=\exists x\exists y[\forall x\forall y\exists z(\neg p(x,y)\vee q(x,y,z)\vee r(x,z,y))\wedge\forall z\neg r(x,z,y)\wedge\forall x\forall yp(x,y)\wedge\forall x\forall y\forall z\neg q(x,y,z)]=\\
=\exists x\exists y[\forall u\forall v\exists z(\neg p(u,v)\vee q(u,v,z)\vee r(u,z,v))\wedge\forall u\neg r(x,u,y)\wedge\forall u\forall vp(u,v)\wedge\forall u\forall v\forall w\neg q(u,v,w)]=\\
=\exists x\exists y\forall u\forall v[\exists z(\neg p(u,v)\vee q(u,v,z)\vee r(u,z,v))\wedge\neg r(x,u,y)\wedge p(u,v)\wedge\forall w\neg q(u,v,w)]=\\
=\exists x\exists y\forall u\forall v\exists z\forall w[(\neg p(u,v)\vee q(u,v,z)\vee r(u,z,v))\wedge\neg r(x,u,y)\wedge p(u,v)\wedge\neg q(u,v,w)].
\end{array}
$$

После сколемизације: $x\mapsto a,\ y\mapsto b,\ z\mapsto f(u,v)$ добијамо клаузну форму:

$$K=\forall u\forall v\forall w[(\neg p(u,v)\vee q(u,v,f(u,v))\vee r(u,f(u,v),v))\wedge\neg r(a,u,b)\wedge p(u,v)\wedge\neg q(u,v,w)],$$

и за њу показујемо да је незадовољива методом резолуције.

$C_1=\{\neg p(u_1,v_1),q(u_1,v_1,f(u_1,v_1)),r(u_1,f(u_1,v_1),v_1)\}$		
$C_2=\{\neg r(a,u_2,b)\}$		
$C_3=\{p(u_3,v_3)\}$		
$C_4=\{\neg q(u_4,v_4,w_4)\}$		
$C_5=\{\neg p(a,b),q(a,b,f(a,b))\}$	$Res(C_1,C_2,3,1)$	$[u_1\mapsto a,\ v_1\mapsto b,\ u_2\mapsto f(a,b)]$
$C_6=\{q(a,b,f(a,b))\}$	$Res(C_3,C_5,1,1)$	$[u_3\mapsto a,\ v_3\mapsto b]$
$C_7=\emptyset$	$Res(c_4,C_6,1,1)$	$[u_4\mapsto a,\ v_4\mapsto b,\ w_4\mapsto f(a,b)]$

Како смо добили празну клаузу, то је клаузна форма K формуле $\neg F$ незадовољива, па је и $\neg F$ незадовољива, одакле је F ваљана. □

Славко Моцоња
slavkomm@gmail.com
http://www.matf.bg.ac.yu/~slavko