Увод у математичку логику, Фебруар 2015. *7. фебруар 2015.*

1. На Острву верника и неверника (верници увек говоре истину, неверници увек лажу) браћа A и B су спортисти. Познато је да сваки од браће A и B игра или фудбал или кошарку. A и B, као и њихови пријатељи C и D, су дали следеће изјаве:

A: Ако сам ја фудбалер, онда је B кошаркаш.

B: A је или верник или кошаркаш.

C: Тачно један од A и D је верник.

D: Ако је A верник, онда је и C верник.

Шта можемо да закључимо?

Решење. Означимо са p исказ "A је фудбалер.", а са q исказ "B је фудбалер." Тада $\neg p$ и $\neg q$ редом значе "A је кошаркаш." и "B је кошаркаш." Из датих изјава имамо:

$$a \Leftrightarrow (p \Rightarrow \neg q) = 1 \tag{1}$$

$$b \Leftrightarrow (a \veebar \neg p) = 1 \tag{2}$$

$$c \Leftrightarrow (a \veebar d) = 1 \tag{3}$$

$$d \Leftrightarrow (a \Rightarrow c) = 1 \tag{4}$$

Коментаришемо по слову a. Ако је $a = 1$, тада из (3) имамо да је $c = \neg d$, а из (4) да је $d = c$, што је контрадикција.

Дакле, $a = 0$, па из (1) имамо да је $p = 1$ и $q = 1$. Из (2) је тада $b = 0$. Из (4) је $d = 1$, па је коначно из (3) $c = 1$. Према томе, A, B су неверници и фудбалери, а C и D су верници. $\dashv$

2. Нека је A произвољан скуп и X, Y скупови такви да важи: $A \cap X = A \cap Y$ и $A \cup X = A \cup Y$. Доказати да је $X = Y$.

Решење. Из $A \cap X = A \cap Y$ имамо да је $\chi_{A\cap X} = \chi_{A\cap Y}$, тј. $\chi_A\chi_X = \chi_A\chi_Y$ (1),

а из $A \cup X = A \cup Y$ имамо да је $\chi_{A\cup X} = \chi_{A\cup Y}$, тј. $\chi_A + \chi_X + \chi_A\chi_X = \chi_A + \chi_Y + \chi_A\chi_Y$ (2).

Из (1) и (2) сада следи $\chi_A + \chi_X = \chi_A + \chi_Y$, па је $\chi_X = \chi_Y$, одакле је $X = Y$. $\dashv$

3. Нека је $f : X \xrightarrow{\text{1-1}} Y$ и $A_1, A_2 \subseteq X$, доказати: $f^{-1}[f[A_1] \triangle f[A_2]] = A_1 \triangle A_2$.

Решење. Приметимо да f је 1-1 повлачи да важи: $x \in A$ акко $f(x) \in f[A]$. ($\Rightarrow$ увек важи; $\Leftarrow$ ако $f(x) \in f[A]$, тада по дефиницији директне слике постоји $x' \in A$ тако да $f(x) = f(x')$, па како је f 1-1, то је $x = x' \in A$.)

$\subseteq$: Нека $x \in f^{-1}[f[A_1] \triangle f[A_2]]$ повлачи $f(x) \in f[A_1] \triangle f[A_2]$. Тада имамо два слуцаја. Први случај: $f(x) \in f[A_1]$ и $f(x) \notin f[A_2]$; према претходној напомени тада $x \in A_1$ и $x \notin A_2$, па $x \in A_1 \triangle A_2$. Други случај, $f(x) \notin f[A_1]$ и $f(x) \in f[A_2]$, се слично разматра.

$\supseteq$: Нека $x \in A_1 \triangle A_2$. Имамо два случаја. Први случај: $x \in A_1$ и $x \notin A_2$. Тада према горњој напомени $f(x) \in f[A_1]$ и $f(x) \notin A_2$, па $f(x) \in f[A_1] \triangle f[A_2]$, одакле $x \in f^{-1}[f[A_1] \triangle f[A_2]]$. Други случај, $x \notin A_1$ и $x \in A_2$, се слично разматра. $\dashv$

4. На партитивном скупу скупа целих бројева, $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, дефинисана је релација $\sim$ са: $A \sim B$ акко $|A \cap \mathbb{N}| = |B \cap \mathbb{N}|$, где је $\mathbb{N}$ скуп природних бројева.

(1) Доказати да је $\sim$ еквиваленција на $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$.

(2) Одредити класе $\emptyset/_\sim$, $\{-5, 1000\}/_\sim$, $\{7\}/_\sim$ и $\mathbb{Z}/_\sim$.

Решење. Провера да је релација еквиваленција је тривијална. Имамо да је:

$$A/_\sim = \{X \mid X \sim A\} = \{X \mid |X \cap \mathbb{N}| = |A \cap \mathbb{N}|\},$$

што ће рећи да је класа од A одређена само са бројем елемената у скупу $A \cap X$. Према томе:

$$\emptyset/_\sim = \{X \mid |X \cap \mathbb{N}| = |\emptyset \cap \mathbb{N}|\} = \{X \mid |X \cap \mathbb{N}| = 0\} = \mathcal{P}(\mathbb{Z}^-),$$

где је $\mathbb{Z}^-$ скуп негативних целих бројева.

Приметимо да је $\{-5, 1000\} \sim \{7\}$ јер оба скупа имају по један природан број у себи. Према томе:

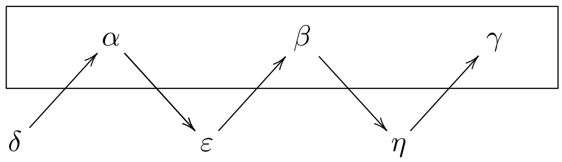
$$\{-5, 1000\}/_\sim = \{7\}/_\sim = \{X \mid |X \cap \mathbb{N}| = 1\} = \{\{n\} \cup X \mid n \in \mathbb{N},\, X \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^-)\}.$$

Коначно $\mathbb{Z}/_\sim$ је класа скупова који садрже бесконачно много природних бројева:

$$\mathbb{Z}/_\sim = \{X \mid |X \cap \mathbb{N}| = \aleph_0\} = \{X \cup Y \mid X \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N}),\, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^-)\},$$

где $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ означава скуп бесконачних подскупова од $\mathbb{N}$. $\dashv$

5. На скупу $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta\}$ дефинисан је модел $\mathbb{A}$ језика $\mathcal{L} = \{p, r\}$ ($\mathrm{ar}\, p = 1, \mathrm{ar}\, r = 2$), следећом сликом ($p^{\mathbb{A}}$ је представљен правоугаоником, $r^{\mathbb{A}}$ је представљен стрелицама):



Записати формуле $F_a(x)$, за све $a \in A$, такве да $F_a(x)$ дефинише a.

Решење. Модел чини низ стрелица: $\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$ и позиција елемента у овом низу га јединствено одређује. Тако је нпр. α дефинисана са:

$$F_\alpha(x) = \exists y_1 y_2 y_3 y_4 y_5\, [r(y_1, x) \wedge r(x, y_2) \wedge r(y_2, y_3) \wedge r(y_3, y_4) \wedge r(y_4, y_5)],$$

а β са:

$$F_\beta(x) = \exists y_1 y_2 y_3 y_4 y_5\, [r(y_1, y_2) \wedge r(y_2, y_3) \wedge r(y_3, x) \wedge r(x, y_4) \wedge r(y_4, y_5)].$$

Слично су дефинисани и остали елементи. $\dashv$