Увод у математичку логику, Јануар 2012. *I и IV ток – група А* *18. јануар 2012.*

1. Нека су A, B и C произвољни скупови. Методом карактеристичних функција доказати:
$$(C - A) - (C - B) = C \cap B \text{ ако и само ако је } A \cap B \cap C = \emptyset.$$

2. На скупу Z дефинисана је релација ρ са : $x \rho y$ ако и само ако $5 \mid x^2 + 3x - y^2 - 3y$. Испитати да ли је ρ релација еквиваленције и ако јесте одредити количнички скуп.

3. Нека је $\mathbb{B}$ Булова алгебра. Дефинишимо бинарну операцију $\triangle$ са: $x \triangle y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y)$. Доказати: $x \triangle y = 1$ ако и само ако $x' = y$.

   [*У доказу се могу користити без доказа:* $(x')' = x, x \wedge x = x, x \wedge 0 = 0, x \wedge (x \vee y) = x, (x \wedge y)' = x' \vee y'$, *асоцијативност као и одговарајуће дуалне формуле наведених формула.*]

4. Доказати да у Лукашиевичевом рачуну важи: $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee C$.

   [*У доказу се могу користити без доказа стандардне леме, као и леме:* $A \wedge B \vdash A$ *и* $A \wedge B \vdash B$.]

5. Нека су A, B, C и D исказне формуле такве да су формуле $A \Rightarrow (B \vee C)$ и $B \Rightarrow (C \Leftrightarrow D)$ таутологије. Доказати да је тада и формула $(A \wedge D) \Rightarrow C$ таутологија.

6. Дата је формула: $\exists x\, (p(x) \wedge q(x)) \wedge \forall x\, (q(x) \Rightarrow r(x)) \Rightarrow \forall x\, (p(x) \Rightarrow r(x))$.

   (а) Одредити једно $a \in \mathsf{N}$ тако да је $\mathbb{K} = (\mathsf{N}, p^{\mathbb{K}}, q^{\mathbb{K}}, r^{\mathbb{K}})$ контрамодел за дату формулу, где:
   $$p^{\mathbb{K}}(n) = \top \text{ акко } n > 4, \quad q^{\mathbb{K}}(n) = \top \text{ акко } n > a, \quad r^{\mathbb{K}}(n) = \top \text{ акко } n > 6.$$

   (б) Одредити једно $b \in \mathsf{N}$ тако да је $\mathbb{M} = (\mathsf{N}, p^{\mathbb{M}}, q^{\mathbb{M}}, r^{\mathbb{M}})$ модел за дату формулу, где
   $$p^{\mathbb{M}}(n) = \top \text{ акко } n > 4, \quad q^{\mathbb{M}}(n) = \top \text{ акко } n > b, \quad r^{\mathbb{M}}(n) = \top \text{ акко } n > 6.$$

   Доказати да је тако добијена структура контрамодел (а), односно модел (б) дате формуле.

7. Методом таблоа доказати да је следећа формула ваљана:
$$\forall x\, (p(x) \Rightarrow \forall y\, q(x, y)) \wedge \forall x \exists y\, (q(x, y) \Rightarrow \neg r(x)) \Rightarrow [\exists x\, r(x) \Rightarrow \exists x\, (r(x) \wedge \neg p(x))].$$

Студенти који полажу други део раде задатке 3, 4, 5, 6 и 7. Сви остали студенти раде задатке 1, 2, 3, 5, 6 и 7.

Студент предаје ***само једну*** дволисницу из свеске, на којој треба да напише име и презиме, број индекса, ознаку групе у којој слуша наставу и ознаку групе задатака.

Увод у математичку логику, Јануар 2012. *I и IV ток – група Б* *18. јануар 2012.*

1. Нека су A, B и C произвољни скупови. Методом карактеристичних функција доказати:

$$(A - B) - (A - C) = A \cap C \text{ ако и само ако је } A \cap B \cap C = \emptyset.$$

2. На скупу Z дефинисана је релација ρ са : $x\rho y$ ако и само ако $7 \mid x^2 + 4x - y^2 - 4y$. Испитати да ли је ρ релација еквиваленције и ако јесте одредити количнички скуп.

3. Нека је $\mathbb{B}$ Булова алгебра. Дефинишеимо бинарну операцију ∇ са: $x \nabla y = (x \vee y') \wedge (x' \vee y)$. Доказати: $x \nabla y = 1$ ако и само ако $x = y$.

   [*У доказу се могу користити без доказа:* $(x')' = x, x \wedge x = x, x \wedge 0 = 0, x \wedge (x \vee y) = x, (x \wedge y)' = x' \vee y'$, *асоцијативност као и одговарајуће дуалне формуле наведених формула.*]

4. Доказати да у Лукашиевичевом рачуну важи: $C \wedge (B \vee A) \vdash (C \wedge B) \vee A$.

   [*У доказу се могу користити без доказа стандардне леме, као и леме:* $A \wedge B \vdash A$ *и* $A \wedge B \vdash B$.]

5. Нека су A, B, C и D исказне формуле такве да су формуле $(A \Rightarrow B) \vee C$ и $B \Rightarrow (C \Leftrightarrow D))$ таутологије. Доказати да је тада и формула $A \Rightarrow (D \Rightarrow C)$ таутологија.

6. Дата је формула: $\exists x\, (p(x) \wedge q(x)) \wedge \forall x\, (q(x) \Rightarrow r(x)) \Rightarrow \forall x\, (p(x) \Rightarrow r(x))$.

   (а) Одредити једно $a \in \mathsf{N}$ тако да је $\mathbb{K} = (\mathsf{N}, p^{\mathbb{K}}, q^{\mathbb{K}}, r^{\mathbb{K}})$ контрамодел за дату формулу, где:

   $$p^{\mathbb{K}}(n) = \top \text{ акко } n > 5, \quad q^{\mathbb{K}}(n) = \top \text{ акко } n > a, \quad r^{\mathbb{K}}(n) = \top \text{ акко } n > 7.$$

   (б) Одредити једно $b \in \mathsf{N}$ тако да је $\mathbb{M} = (\mathsf{N}, p^{\mathbb{M}}, q^{\mathbb{M}}, r^{\mathbb{M}})$ модел за дату формулу, где

   $$p^{\mathbb{M}}(n) = \top \text{ акко } n > 5, \quad q^{\mathbb{M}}(n) = \top \text{ акко } n > b, \quad r^{\mathbb{M}}(n) = \top \text{ акко } n > 7.$$

   Доказати да је тако добијена структура контрамодел (а), односно модел (б) дате формуле.

7. Методом таблоа доказати да је следећа формула ваљана:

$$\forall x\, (p(x) \Rightarrow \exists y\, q(x,y)) \wedge \forall x \forall y\, (q(x,y) \Rightarrow \neg r(x)) \Rightarrow [\exists x\, r(x) \Rightarrow \exists x\, (r(x) \wedge \neg p(x))].$$

Студенти који полажу други део раде задатке 3, 4, 5, 6 и 7. Сви остали студенти раде задатке 1, 2, 3, 5, 6 и 7.

Студент предаје ***само једну*** *дволисницу из свеске, на којој треба да напише име и презиме, број индекса, ознаку групе у којој слуша наставу и ознаку групе задатака.*