Испит из Алгебре 1, јануарски рок, Л смер

17. јануар 2013.

1. Доказати да је G/N комутативна група ако и само ако N садржи G'.
(G' је извод групе G, односно $G' = \langle a^{-1}b^{-1}ab \,|\, a, b \in G\rangle$)

2. Нека је $G = \{(a, b) \,|\, a, b \in \mathbb{R}\} \setminus \{(0, 0)\}$.
а) Доказати да је $(G, \circ)$ група, где је $(a, b) \circ (c, d) = (ac - 5bd, ad + bc)$.
б) Доказати да је $f : (G, \circ) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$, $f(a, b) = a^2 + 5b^2$, хомоморфизам група, где је $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
в) Наћи барем једну подгрупу U групе G за коју важи $G/U \cong \mathbb{R}^+$, где је $\mathbb{R}^+$ мултипликативна група позитивних реалних бројева.

3. Одредити нормалну и елементарну форму комутативне групе задате генераторима x_1, x_2, x_3 и релацијама

$$\begin{aligned} 6x_1 + 8x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 8x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 4x_2 + 8x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Колико елемената ове групе је реда 12?

---

4. Дате су пермутације $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 6 & 9 & 5 & 4 & 1 & 7 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ и $\pi = (1\,2\,5\,4)(2\,9\,7\,4)(3\,8\,2)(6\,1\,7)$.
а) Одредити ред и знак пермутација σ и π.
б) Одредити $\sigma^{17}\pi^1\sigma^{2013}$.

(**Напомена:** за пермутације α и β је $\alpha\beta = \beta \circ \alpha$.)

5. Одредити последње две цифре (у декадном запису) броја $402^{303^{204}}$.

Напомена. Задаци бр. 1–3 вреде по 10 поена, а задаци бр. 4–5 вреде по 5 поена и нису обавезни. Задатак бр. 4 може „заменити” задатак бр. 3 са колоквијума, а задатак бр. 5 „заменити” задатак бр. 4 са колоквијума, уз ограничење да се укупно може освојити највише 30 поена (испит + увећање колоквијума).

Испит из Алгебре 1, јануарски рок, Л смер

17. јануар 2013.

1. Доказати да је G/N комутативна група ако и само ако N садржи G'.
(G' је извод групе G, односно $G' = \langle a^{-1}b^{-1}ab \,|\, a, b \in G\rangle$)

2. Нека је $G = \{(a, b) \,|\, a, b \in \mathbb{R}\} \setminus \{(0, 0)\}$.
а) Доказати да је $(G, \circ)$ група, где је $(a, b) \circ (c, d) = (ac - 5bd, ad + bc)$.
б) Доказати да је $f : (G, \circ) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$, $f(a, b) = a^2 + 5b^2$, хомоморфизам група, где је $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
в) Наћи барем једну подгрупу U групе G за коју важи $G/U \cong \mathbb{R}^+$, где је $\mathbb{R}^+$ мултипликативна група позитивних реалних бројева.

3. Одредити нормалну и елементарну форму комутативне групе задате генераторима x_1, x_2, x_3 и релацијама

$$\begin{aligned} 6x_1 + 8x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 8x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 4x_2 + 8x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Колико елемената ове групе је реда 12?

---

4. Дате су пермутације $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 6 & 9 & 5 & 4 & 1 & 7 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ и $\pi = (1\,2\,5\,4)(2\,9\,7\,4)(3\,8\,2)(6\,1\,7)$.
а) Одредити ред и знак пермутација σ и π.
б) Одредити $\sigma^{17}\pi^1\sigma^{2013}$.

(**Напомена:** за пермутације α и β је $\alpha\beta = \beta \circ \alpha$.)

5. Одредити последње две цифре (у декадном запису) броја $402^{303^{204}}$.

Напомена. Задаци бр. 1–3 вреде по 10 поена, а задаци бр. 4–5 вреде по 5 поена и нису обавезни. Задатак бр. 4 може „заменити” задатак бр. 3 са колоквијума, а задатак бр. 5 „заменити” задатак бр. 4 са колоквијума, уз ограничење да се укупно може освојити највише 30 поена (испит + увећање колоквијума).