Алгебра 1 **11.06.2014.**
Р смер

$\boxed{1}$ Нека је $G = \mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}$ мултипликативна група не-нула елемената поља $\mathbb{Z}_{13}$.

а) Доказати да је G циклична група и одредити све њене генераторе.

б) Одредити све праве подгрупе групе G и за сваку од њих бар по један генератор.

в) Нека је $f : G \to H$ нетривијални хомоморфизам из групе G у групу H која је реда 10. Одредити $\mathrm{Ker} f$ і $\mathrm{Im} f$.

$\boxed{2}$ а) Доказати да је група $\mathbb{S}_4$ генерисана са $\sigma = (1, 2, 3, 4)$ и $\tau = (3, 2, 1)$.

б) Доказати да група $\mathbb{S}_4$ има 4 различите подгрупе изоморфне са $\mathbb{S}_3$ и 9 различитих подгрупа изоморфних са $\mathbb{S}_2$.

в) Доказати да су једине праве нормалне подгрупе групе $\mathbb{S}_4$ Клајнова група $K = \{\varepsilon,\ (1, 2)(3, 4),\ (1, 3)(2, 4),\ (1, 4)(2, 3)\}$ и алтернирајућа група $\mathbb{A}_4$.

$\boxed{3}$ а) Класификовати све Абелове групе реда 2178 и у свакој од њих одредити број елемената максималног реда.

б) Ако је G Абелова група реда 2178 која не садржи елементе реда 18, као ни елементе реда 242, одредити инваријантне делитеље за G и број елемената реда 33 у њој.

$\boxed{4}$ а) Решити систем конгруенција у скупу $\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} x &= 0 (\mathrm{mod}\ 2) \\ x &= 1 (\mathrm{mod}\ 5) \\ x &= 2 (\mathrm{mod}\ 3). \end{aligned}$$

б) Ако је x решење претходног система конгруенција у скупу $\mathbb{Z}^+$ позитивних целих бројева, доказати да за сваки прост број p број $p^2 + x$ није прост. (Размотрити случај када је $p = 2$, $p = 3$ и $p > 3$)

Све одговоре детаљно образложити

Алгебра 1 **11.06.2014.**
Р смер

$\boxed{1}$ Нека је $G = \mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}$ мултипликативна група не-нула елемената поља $\mathbb{Z}_{13}$.

а) Доказати да је G циклична група и одредити све њене генераторе.

б) Одредити све праве подгрупе групе G и за сваку од њих бар по један генератор.

в) Нека је $f : G \to H$ нетривијални хомоморфизам из групе G у групу H која је реда 10. Одредити $\mathrm{Ker} f$ і $\mathrm{Im} f$.

$\boxed{2}$ а) Доказати да је група $\mathbb{S}_4$ генерисана са $\sigma = (1, 2, 3, 4)$ и $\tau = (3, 2, 1)$.

б) Доказати да група $\mathbb{S}_4$ има 4 различите подгрупе изоморфне са $\mathbb{S}_3$ и 9 различитих подгрупа изоморфних са $\mathbb{S}_2$.

в) Доказати да су једине праве нормалне подгрупе групе $\mathbb{S}_4$ Клајнова група $K = \{\varepsilon,\ (1, 2)(3, 4),\ (1, 3)(2, 4),\ (1, 4)(2, 3)\}$ и алтернирајућа група $\mathbb{A}_4$.

$\boxed{3}$ а) Класификовати све Абелове групе реда 2178 и у свакој од њих одредити број елемената максималног реда.

б) Ако је G Абелова група реда 2178 која не садржи елементе реда 18, као ни елементе реда 242, одредити инваријантне делитеље за G и број елемената реда 33 у њој.

$\boxed{4}$ а) Решити систем конгруенција у скупу $\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} x &= 0 (\mathrm{mod}\ 2) \\ x &= 1 (\mathrm{mod}\ 5) \\ x &= 2 (\mathrm{mod}\ 3). \end{aligned}$$

б) Ако је x решење претходног система конгруенција у скупу $\mathbb{Z}^+$ позитивних целих бројева, доказати да за сваки прост број p број $p^2 + x$ није прост. (Размотрити случај када је $p = 2$, $p = 3$ и $p > 3$)

Све одговоре детаљно образложити