Колоквијум из Алгебре 1, Л смер *15. децембар 2012.*

1. Нека је $G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z}_6,\ \text{НЗД}\,(a,6) = 1 \right\}$.

а) Доказати да је G група у односу на множење матрица и одредити њен ред.

б) Доказати да је $H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z}_6 \right\}$ подгрупа од G која је генерисана елементом $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

в) Одредити ред елемената $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ у групи H.

2. а) Одредити ред елемента $\rho^{25}\sigma^{1}\rho^{1736}$ у групи $\mathbb{D}_{17}$ (која је генерисана ротацијом ρ и симетријом σ).

б) Да ли постоји хомоморфизам $f : \mathbb{D}_{30} \to \mathbb{Z}_{30}$ такав да је $f(\rho^{10}) = 3$?

в) Одредити максималан ред елемента групе $\mathbb{D}_{10} \times \mathbb{S}_{10}$ и групе $\mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{D}_{21}$. Да ли је $\mathbb{D}_{10} \times \mathbb{S}_{10} \cong \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{D}_{21}$?

3. Дате су пермутације $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 1 & 9 & 2 & 4 & 3 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ и $\pi = (1\,4\,9\,2)(4\,7\,8\,9)(2\,1\,8)$.

а) Одредити ред и знак пермутација σ и π.

б) Одредити $\pi^{16}\sigma^{8}\pi^{1821}$.

в) Записати пермутације π и σ као производ елемената скупа $\{(1\,2), (1\,3), (1\,4), (1\,5), (1\,6), (1\,7), (1\,8), (1\,9)\}$.

(**Напомена:** за пермутације α и β је $\alpha\beta = \beta \circ \alpha$.)

4. а) Одредити $\varphi(15 \cdot 12 \cdot 2012)$ (503 је прост број).

б) Решити систем конгруенција

$$x \equiv 2 \pmod 7, \quad x \equiv 1 \pmod{11}, \quad x \equiv 9 \pmod{13}.$$

в) Одредити остатак при дељењу броја 2012^{2012} бројем $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$.

Колоквијум из Алгебре 1, Л смер *15. децембар 2012.*

5. Нека је $G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z}_6,\ \text{НЗД}\,(a,6) = 1 \right\}$.

а) Доказати да је G група у односу на множење матрица и одредити њен ред.

б) Доказати да је $H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z}_6 \right\}$ подгрупа од G која је генерисана елементом $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

в) Одредити ред елемената $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ у групи H.

1. а) Одредити ред елемента $\rho^{25}\sigma^{1}\rho^{1736}$ у групи $\mathbb{D}_{17}$ (која је генерисана ротацијом ρ и симетријом σ).

б) Да ли постоји хомоморфизам $f : \mathbb{D}_{30} \to \mathbb{Z}_{30}$ такав да је $f(\rho^{10}) = 3$?

в) Одредити максималан ред елемента групе $\mathbb{D}_{10} \times \mathbb{S}_{10}$ и групе $\mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{D}_{21}$. Да ли је $\mathbb{D}_{10} \times \mathbb{S}_{10} \cong \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{D}_{21}$?

2. Дате су пермутације $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 1 & 9 & 2 & 4 & 3 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ и $\pi = (1\,4\,9\,2)(4\,7\,8\,9)(2\,1\,8)$.

а) Одредити ред и знак пермутација σ и π.

б) Одредити $\pi^{16}\sigma^{8}\pi^{1821}$.

в) Записати пермутације π и σ као производ елемената скупа $\{(1\,2), (1\,3), (1\,4), (1\,5), (1\,6), (1\,7), (1\,8), (1\,9)\}$.

(**Напомена:** за пермутације α и β је $\alpha\beta = \beta \circ \alpha$.)

3. а) Одредити $\varphi(15 \cdot 12 \cdot 2012)$ (503 је прост број).

б) Решити систем конгруенција

$$x \equiv 2 \pmod 7, \quad x \equiv 1 \pmod{11}, \quad x \equiv 9 \pmod{13}.$$

в) Одредити остатак при дељењу броја 2012^{2012} бројем $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$.