Алгебра 1 **03.09.2014.**
Р смер

1 Дата је пермутација скупа $\{1,2,\ldots,12\}$

$$\pi = (9,5,10,1,8,12)(10,11,6)(9,11,5,2).$$

а) Пермутацију π^2 представити у облику производа дисјунктних циклуса, а затим јој одредити знак и ред у групи $\mathbb{S}_{12}$.

б) Нека је G подгрупа групе $\mathbb{S}_{12}$ генерисана пермутацијама π^2 и $\tau = (10,3)$. Доказати да је G циклична група реда 10 и навести све њене генераторе.

в) Описати све подгрупе групе G.

г) Колико има аутоморфизама групе G?

2 Нека је $G = D_8 = \langle \rho, \sigma \rangle$ диедарска група симетрија правилног осмоугла, а H њена циклична подгрупа генерисана са ρ^2.

а) Написати све различите леве косете подгрупе H у групи G, и за сваки од тих левих косета његове елементе изразити у функцији од ρ и σ.

б) Доказати да је H нормална погрупа групе G, а затим одредити ред количничке групе G/H.

в) Одредити редове свих елемената количничке групе G/H. Да ли је G/H циклична?

3 Нека је G комутативна група задата формалним генераторима a, b, c и системом релација:

$$\begin{array}{ccccccc} 11a & + & 22b & + & 13c & = & 0 \\ 14a & + & 25b & + & 16c & = & 0 \\ 19a & + & 50b & + & 23c & = & 0. \end{array}$$

а) Представити групу G у елементарној и нормалној форми.

б) Одредити број елемената реда 3, реда 6 и реда 9 у групи G.

в) Испитати да ли постоји природан број n тако да је група G изоморфна са $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_n$.

4 а) Ако је p прост број, доказати да је $(2p-1)! \equiv p \ (mod\ p^2)$.

б) Доказати да је $2000^{6n+2} + 5! \equiv 16 \ (mod\ 18)$, за све $n \in \mathbb{N}$.

в) Ако је $c = 2000^{6n+2} + 5!$, одредити колики је остатак при дељењу броја 990^c са 19, а затим одредити сва решења једначине $x^2 + 15 = 990^c$ у $\mathbb{Z}_{19}$.

Све одговоре детаљно образложити

Алгебра 1 **03.09.2014.**
Р смер

1 Дата је пермутација скупа $\{1,2,\ldots,12\}$

$$\pi = (9,5,10,1,8,12)(10,11,6)(9,11,5,2).$$

а) Пермутацију π^2 представити у облику производа дисјунктних циклуса, а затим јој одредити знак и ред у групи $\mathbb{S}_{12}$.

б) Нека је G подгрупа групе $\mathbb{S}_{12}$ генерисана пермутацијама π^2 и $\tau = (10,3)$. Доказати да је G циклична група реда 10 и навести све њене генераторе.

в) Описати све подгрупе групе G.

г) Колико има аутоморфизама групе G?

2 Нека је $G = D_8 = \langle \rho, \sigma \rangle$ диедарска група симетрија правилног осмоугла, а H њена циклична подгрупа генерисана са ρ^2.

а) Написати све различите леве косете подгрупе H у групи G, и за сваки од тих левих косета његове елементе изразити у функцији од ρ и σ.

б) Доказати да је H нормална погрупа групе G, а затим одредити ред количничке групе G/H.

в) Одредити редове свих елемената количничке групе G/H. Да ли је G/H циклична?

3 Нека је G комутативна група задата формалним генераторима a, b, c и системом релација:

$$\begin{array}{ccccccc} 11a & + & 22b & + & 13c & = & 0 \\ 14a & + & 25b & + & 16c & = & 0 \\ 19a & + & 50b & + & 23c & = & 0. \end{array}$$

а) Представити групу G у елементарној и нормалној форми.

б) Одредити број елемената реда 3, реда 6 и реда 9 у групи G.

в) Испитати да ли постоји природан број n тако да је група G изоморфна са $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_n$.

4 а) Ако је p прост број, доказати да је $(2p-1)! \equiv p \ (mod\ p^2)$.

б) Доказати да је $2000^{6n+2} + 5! \equiv 16 \ (mod\ 18)$, за све $n \in \mathbb{N}$.

в) Ако је $c = 2000^{6n+2} + 5!$, одредити колики је остатак при дељењу броја 990^c са 19, а затим одредити сва решења једначине $x^2 + 15 = 990^c$ у $\mathbb{Z}_{19}$.

Све одговоре детаљно образложити