Алгебра 2 **10.02.2015.**
Л смер

$\boxed{1}$ Нека је $f(X) = X^2 + X + 1 \in \mathbb{Z}_5[X]$.

а) Доказати да је полином f нерастављив у прстену $\mathbb{Z}_5[X]$, а затим да је $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_5[X]/_{\langle f \rangle}$ поље.

б) Одредити бар једну базу векторског простора $\mathbb{F}$ над пољем $\mathbb{Z}_5$ као и број елемената поља $\mathbb{F}$.

в) Доказати да су $\alpha_1 = X + \langle f \rangle$ и $\alpha_2 = 4X + 4 + \langle f \rangle$ нуле полинома f у пољу $\mathbb{F}$, а затим одредити мултипликативне инверзе елемената $\alpha_1 + 1$ и $\alpha_2 + 3$ у пољу $\mathbb{F}$.

$\boxed{2}$ а) Одредити факторизацијско поље K полинома $x^8 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

б) Наћи степен раширења $[K : \mathbb{Q}]$.

в) Ако је $\varepsilon = cos\frac{2\pi}{8} + i \cdot sin\frac{2\pi}{8}$ примитиван осми корен из јединице, елемент $\frac{\varepsilon^2+1}{\varepsilon^2-3}$ изразити у облику $q(\varepsilon)$, где је $q \in \mathbb{Q}[X]$.

$\boxed{3}$ Нека су са 1, 2, 3 и 4 означена темена квадрата, са a_{12}, a_{23}, a_{34} и a_{14} његове странице, а са d_{13} и d_{24} његове дијагонале. Нека је G група изометрија квадрата генерисана са

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

а) Изразити све елементе групе G преко генератора ρ и σ.

б) Одредити све орбите и стабилизаторе при дејству групе G на скупу $X = \{1, 2, a_{12}, a_{23}, d_{13}\}$.

$\boxed{4}$ Нека је G група реда 980.

а) Доказати да G има подгрупу L реда 245, а затим и да је подгрупа L комутативна.

б) Доказати да је $L = \mathrm{Core}L$.

Све одговоре детаљно образложити

Алгебра 2 **10.02.2015.**
Л смер

$\boxed{1}$ Нека је $f(X) = X^2 + X + 1 \in \mathbb{Z}_5[X]$.

а) Доказати да је полином f нерастављив у прстену $\mathbb{Z}_5[X]$, а затим да је $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_5[X]/_{\langle f \rangle}$ поље.

б) Одредити бар једну базу векторског простора $\mathbb{F}$ над пољем $\mathbb{Z}_5$ као и број елемената поља $\mathbb{F}$.

в) Доказати да су $\alpha_1 = X + \langle f \rangle$ и $\alpha_2 = 4X + 4 + \langle f \rangle$ нуле полинома f у пољу $\mathbb{F}$, а затим одредити мултипликативне инверзе елемената $\alpha_1 + 1$ и $\alpha_2 + 3$ у пољу $\mathbb{F}$.

$\boxed{2}$ а) Одредити факторизацијско поље K полинома $x^8 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

б) Наћи степен раширења $[K : \mathbb{Q}]$.

в) Ако је $\varepsilon = cos\frac{2\pi}{8} + i \cdot sin\frac{2\pi}{8}$ примитиван осми корен из јединице, елемент $\frac{\varepsilon^2+1}{\varepsilon^2-3}$ изразити у облику $q(\varepsilon)$, где је $q \in \mathbb{Q}[X]$.

$\boxed{3}$ Нека су са 1, 2, 3 и 4 означена темена квадрата, са a_{12}, a_{23}, a_{34} и a_{14} његове странице, а са d_{13} и d_{24} његове дијагонале. Нека је G група изометрија квадрата генерисана са

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

а) Изразити све елементе групе G преко генератора ρ и σ.

б) Одредити све орбите и стабилизаторе при дејству групе G на скупу $X = \{1, 2, a_{12}, a_{23}, d_{13}\}$.

$\boxed{4}$ Нека је G група реда 980.

а) Доказати да G има подгрупу L реда 245, а затим и да је подгрупа L комутативна.

б) Доказати да је $L = \mathrm{Core}L$.

Све одговоре детаљно образложити