Алгебра 2 **12.02.2016.**
Л смер

$\boxed{1}$ а) Доказати да је $K = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ a-b & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ комутативан потпрстен прстена $M_2(\mathbb{R})$, али да K није ни поље ни интегрални домен.

б) Доказати да је $I = \{p(X) \in \mathbb{R}[X] : \ p(1) = 0, \ p(-1) = 0\}$ идеал прстена $\mathbb{R}[X]$ генерисан полиномом $X^2 - 1$.

в) Доказати да је са

$$\phi : p \mapsto \begin{bmatrix} p(1) & 0 \\ p(1) - p(-1) & p(-1) \end{bmatrix}$$

дефинисан епиморфизам прстена $\mathbb{R}[X]$ на прстен K и одредити његово језгро $\mathrm{Ker}\phi$.

г) Доказати да идеал I није ни прост ни максималан.

$\boxed{2}$ а) Доказати да је факторизацијско поље K полинома $X^4 - 10X^2 + 5$ једнако $\mathbb{Q}(\sqrt{5 + 2\sqrt{5}})$.

б) Ако је $\alpha = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$, одредити минимални полином μ_α елемента α над $\mathbb{Q}$ као и степен раширења $[K : \mathbb{Q}]$.

в) Одредити полином најмањег степена $q \in \mathbb{Q}[X]$ за који је $\frac{\alpha^2+2}{\alpha^2-2} = q(\alpha)$.

$\boxed{3}$ Нека је $f(X) = X^3 + aX^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[X]$.

а) Нека је $F = \mathbb{Z}_3[X]/_{\langle f \rangle}$. Одредити вредност $a \in \mathbb{Z}_3$ тако да је F поље.

б) За ту вредност параметра a одредити једну базу векторског простора F над пољем $\mathbb{Z}_3$ као и број елемената поља F.

в) Доказати да су $\alpha = X^2 + 2 + \langle f \rangle$ и $\beta = 2X^2 + 2X + 2 + \langle f \rangle$ нуле полинома f у пољу F, а затим одредити мултипликативне инверзе елемената α и β у пољу F.

$\boxed{4}$ Нека је $X = \left\{ v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : \ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ и $GL(2, \mathbb{Z}_2)$ група инвертибилних матрица реда 2 на пољем $\mathbb{Z}_2$.

а) Доказати да је скуп $G = \{(v, A) : \ v \in X, \ A \in GL(2, \mathbb{Z}_2)\}$ група реда 24 у односу на операцију $\cdot$ дефинисану са $(v_1, A_1) \cdot (v_2, A_2) = (v_1 + A_1 v_2, A_1 A_2)$.

б) Доказати да је са $(v_1, A) \odot v = v_1 + Av$ дефинисано дејство групе G на скупу X.

в) Одредити орбиту и стабилизатор елемената $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ при дејству групе G на скупу X.

$\boxed{5}$ Нека је G група реда $2^4 \cdot 17 \cdot 67$.

а) Доказати да G има нормалну подгрупу реда 17 или реда 67.

б) Доказати да G има подгрупу M реда $17 \cdot 67$, а затим да је M циклична.

в) Доказати да је M нормална подгрупа групе G.

Све одговоре детаљно образложити