Алгебра 2 **21.01.2015.**
Л смер

$\boxed{1}$ Нека је $\mathbb{K} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.

а) Доказати да је $\mathbb{K}$ комутативан потпрстен прстена $M_2(\mathbb{Z})$, али да није поље.

б) Нека је $I = \{p(x) \in \mathbb{Z}[x] : \quad p(1) = 0,\ p'(1) = 0\}$. Доказати да је I идеал прстена $\mathbb{Z}[x]$ генерисан полиномом $(x-1)^2$.

в) Доказати да је са

$$\phi : p \mapsto \begin{bmatrix} p(1) & p'(1) \\ 0 & p(1) \end{bmatrix}$$

дефинисан епиморфизам прстена $\mathbb{Z}[x]$ на прстен K и одредити његово језгро Kerϕ.

г) Да ли је идеал I прост? Да ли је максималан?

$\boxed{2}$ Нека је $\alpha = \sqrt{3+\sqrt{5}}$.

а) Одредити минимални полином μ_α елемента α над $\mathbb{Q}$.

б) Ако је K факторизацијско поље полинома μ_α над пољем $\mathbb{Q}$, показати да је $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ и одредити степен раширења $[K : \mathbb{Q}]$.

в) Елемент $\frac{3\alpha}{4\alpha^2+1}$ изразити у облику $q(\alpha)$, где је $q \in \mathbb{Q}[X]$ и deg q ≤ 3.

$\boxed{3}$ Нека је $\mathbb{G} = \left\{ A = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{Z}_5,\ x \neq 0 \right\}$ група у односу на множење матрица.

а) Доказати да је са

$$\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \odot t = xt + y$$

дефинисано лево дејство групе $\mathbb{G}$ на скупу $\mathbb{Z}_5$.

б) Одредити орбите и стабилизаторе свих елемената из $\mathbb{Z}_5$ при овом дејству.

$\boxed{4}$ Нека је G група реда $10989 = 3^3 \cdot 11 \cdot 37$.

а) Доказати да G има нормалну подгрупу реда 11 или реда 37.

б) Доказати да група G има подгрупу L реда $11{\cdot}37$, а затим и да је подгрупа L циклична.

Све одговоре детаљно образложити

Алгебра 2 **21.01.2015.**
Л смер

$\boxed{1}$ Нека је $\mathbb{K} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.

а) Доказати да је $\mathbb{K}$ комутативан потпрстен прстена $M_2(\mathbb{Z})$, али да није поље.

б) Нека је $I = \{p(x) \in \mathbb{Z}[x] : \quad p(1) = 0,\ p'(1) = 0\}$. Доказати да је I идеал прстена $\mathbb{Z}[x]$ генерисан полиномом $(x-1)^2$.

в) Доказати да је са

$$\phi : p \mapsto \begin{bmatrix} p(1) & p'(1) \\ 0 & p(1) \end{bmatrix}$$

дефинисан епиморфизам прстена $\mathbb{Z}[x]$ на прстен K и одредити његово језгро Kerϕ.

г) Да ли је идеал I прост? Да ли је максималан?

$\boxed{2}$ Нека је $\alpha = \sqrt{3+\sqrt{5}}$.

а) Одредити минимални полином μ_α елемента α над $\mathbb{Q}$.

б) Ако је K факторизацијско поље полинома μ_α над пољем $\mathbb{Q}$, показати да је $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ и одредити степен раширења $[K : \mathbb{Q}]$.

в) Елемент $\frac{3\alpha}{4\alpha^2+1}$ изразити у облику $q(\alpha)$, где је $q \in \mathbb{Q}[X]$ и deg q ≤ 3.

$\boxed{3}$ Нека је $\mathbb{G} = \left\{ A = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{Z}_5,\ x \neq 0 \right\}$ група у односу на множење матрица.

а) Доказати да је са

$$\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \odot t = xt + y$$

дефинисано лево дејство групе $\mathbb{G}$ на скупу $\mathbb{Z}_5$.

б) Одредити орбите и стабилизаторе свих елемената из $\mathbb{Z}_5$ при овом дејству.

$\boxed{4}$ Нека је G група реда $10989 = 3^3 \cdot 11 \cdot 37$.

а) Доказати да G има нормалну подгрупу реда 11 или реда 37.

б) Доказати да група G има подгрупу L реда $11{\cdot}37$, а затим и да је подгрупа L циклична.

Све одговоре детаљно образложити