Алгебра 2 **20.01.2016.**
Л смер

$\boxed{1}$ а) Доказати да је $\mathbb{K} = \left\{ \begin{bmatrix} m & n \\ -5n & m \end{bmatrix} : m, n \in \mathbb{Z} \right\}$ комутативан потпрстен прстена $M_2(\mathbb{Z})$.

б) Доказати да је скуп $\mathbb{I} = \left\{ \begin{bmatrix} 5a & b \\ -5b & 5a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ прост идеал прстена $\mathbb{K}$, а затим да је идеал $\mathbb{I}$ генерисан елементом $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$.

в) Ако је $\rho(m,5)$ остатак при еуклидском дељењу броја m бројем 5, доказати да је са

$$\phi : \begin{bmatrix} m & n \\ -5n & m \end{bmatrix} \mapsto \rho(m,5)$$

дефинисан епиморфизам $\phi : \mathbb{K} \to \mathbb{Z}_5$ прстена $\mathbb{K}$ на прстен $\mathbb{Z}_5$.

г) Одредити његово језгро $\mathrm{Ker}\phi$, а затим испитати да ли је идеал $\mathbb{I}$ максималан.

$\boxed{2}$ а) Доказати да је факторизацијско поље K полинома $X^4 - 12X^2 + 35$ једнако $\mathbb{Q}(\sqrt{5} + \sqrt{7})$.

б) Ако је $\alpha = \sqrt{5} + \sqrt{7}$, одредити минимални полином μ_α елемента α над $\mathbb{Q}$ као и степен раширења $[K : \mathbb{Q}]$.

в) Одредити полином најмањег степена $q \in \mathbb{Q}[X]$ за који је $\frac{\alpha}{\alpha^2 - 1} = q(\alpha)$.

$\boxed{3}$ Нека је $f(X) = X^3 + 5 \in \mathbb{Z}_7[X]$.

а) Доказати да је полином f нераставлјив у прстену $\mathbb{Z}_7[X]$, а затим да је $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_7[X]/_{\langle f \rangle}$ поље.

б) Одредити једну базу векторског простора $\mathbb{F}$ над пољем $\mathbb{Z}_7$ као и број елемената поља $\mathbb{F}$.

в) Доказати да су $\alpha = 2X + \langle f \rangle$ и $\beta = 4X + \langle f \rangle$ нуле полинима f у пољу $\mathbb{F}$, а затим одредити мултипликативне инверзе елемената α и β у пољу $\mathbb{F}$.

$\boxed{4}$ а) Нека је G подгрупа симетричне групе $\mathbb{S}_5$ генерисана пермутацијама $\pi = (123)$ и $\tau = (45)$. Ако група G дејствује на скуп $X = \{1,2,3,4,5\}$ пермутовањем, одредити орбите и стабилизаторе свих елемената скупа X при овом дејству.

б) Ако је S^X скуп свих функција из скупа X у скуп S, доказати да је са $g \odot f = f \circ g^{-1}$ дефинисано дејство групе G на скупу S^X.

в) Ако је $S = \{0,1\}$, а $f : \{1,2,3,4,5\} \to \{0,1\}$ функција дефинисана са $f(1) = 0, f(2) = 1, f(3) = 0, f(4) = 1, f(5) = 1$, одредити орбиту и стабилизатор елемента f при дејству групе G на скупу S^X дефинисаном под б).

$\boxed{5}$ Нека је G група реда 546.

а) Доказати да G има нормалну подгрупу реда 7 или реда 13.

б) Доказати да G има подгрупу M реда 91, а затим да је M циклична.

в) Доказати да је M нормална подгрупа групе G.

Све одговоре детаљно образложити