Алгебра 2 **18.06.2015.**
Л смер

$\boxed{1}$ Нека је $K = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

а) Доказати да је $\mathbb{K}$ комутативан потпрстен прстена $M_2(\mathbb{R})$.

б) Доказати да је $I = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$ прост идеал прстена K. Да ли је I максималан идеал? Да ли је главни?

в) Доказати да је са

$$\phi : \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \mapsto (a+b, a-b)$$

дефинисан изоморфизам прстена K и $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$\boxed{2}$ Нека је $\alpha = \sqrt{4+\sqrt{7}}$.

а) Одредити минимални полином μ_α елемента α над $\mathbb{Q}$.

б) Ако је K факторизацијско поље полинома μ_α над пољем $\mathbb{Q}$, показати да је $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ и одредити степен раширења $[K : \mathbb{Q}]$.

в) Одредити полином $p \in \mathbb{Q}[X]$, $\deg \mathrm{p} < 4$ за који је $\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-9} = p(\alpha)$.

$\boxed{3}$ Нека је $f(X) = X^3 + 2X^2 + 2X + 2$.

а) Доказати да је полином f нерастављив у прстену $\mathbb{Z}_5[X]$, а затим да је $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_5[X]/_{\langle f \rangle}$ поље.

б) Одредити једну базу векторског простора $\mathbb{F}$ над пољем $\mathbb{Z}_5$ као и број елемената поља $\mathbb{F}$.

в) Ако је $\alpha = X^2 + 2X + 2 + \langle f \rangle$, одредити мултипликативни инверз елемента α у пољу $\mathbb{F}$.

$\boxed{4}$ а) Доказати да је са

$$\pi \odot (x_1, x_2, x_3) = (x_{\pi^{-1}(1)}, x_{\pi^{-1}(2)}, x_{\pi^{-1}(3)}), \quad \text{тј.}$$

$$(\pi \odot x)(i) = x(\pi^{-1}(i)), \quad 1 \leq i \leq 3,$$

дефинисано дејство симетричне групе $\mathbb{S}_3$ на скупу $\mathbb{Z}_2^3$ уређених тројки чије су координате из $\mathbb{Z}_2$.

б) Одредити орбите и стабилизаторе свих елемената из $\mathbb{Z}_2^3$ при овом дејству. Колико има различитих орбита?

$\boxed{5}$ Нека је G рупа реда $2^2 \cdot 19 \cdot 37$.

а) Доказати да G има нормалну подгрупу реда 19.

б) Доказати да G има подгрупу H реда $19 \cdot 37$. Да ли је она и циклична?

в) Да ли је H нормална подгрупа групе G?

Све одговоре детально образложити

Алгебра 2 **18.06.2015.**
Л смер

$\boxed{1}$ Нека је $K = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

а) Доказати да је $\mathbb{K}$ комутативан потпрстен прстена $M_2(\mathbb{R})$.

б) Доказати да је $I = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$ прост идеал прстена K. Да ли је I максималан идеал? Да ли је главни?

в) Доказати да је са

$$\phi : \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \mapsto (a+b, a-b)$$

дефинисан изоморфизам прстена K и $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$\boxed{2}$ Нека је $\alpha = \sqrt{4+\sqrt{7}}$.

а) Одредити минимални полином μ_α елемента α над $\mathbb{Q}$.

б) Ако је K факторизацијско поље полинома μ_α над пољем $\mathbb{Q}$, показати да је $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ и одредити степен раширења $[K : \mathbb{Q}]$.

в) Одредити полином $p \in \mathbb{Q}[X]$, $\deg \mathrm{p} < 4$ за који је $\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-9} = p(\alpha)$.

$\boxed{3}$ Нека је $f(X) = X^3 + 2X^2 + 2X + 2$.

а) Доказати да је полином f нерастављив у прстену $\mathbb{Z}_5[X]$, а затим да је $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_5[X]/_{\langle f \rangle}$ поље.

б) Одредити једну базу векторског простора $\mathbb{F}$ над пољем $\mathbb{Z}_5$ као и број елемената поља $\mathbb{F}$.

в) Ако је $\alpha = X^2 + 2X + 2 + \langle f \rangle$, одредити мултипликативни инверз елемента α у пољу $\mathbb{F}$.

$\boxed{4}$ а) Доказати да је са

$$\pi \odot (x_1, x_2, x_3) = (x_{\pi^{-1}(1)}, x_{\pi^{-1}(2)}, x_{\pi^{-1}(3)}), \quad \text{тј.}$$

$$(\pi \odot x)(i) = x(\pi^{-1}(i)), \quad 1 \leq i \leq 3,$$

дефинисано дејство симетричне групе $\mathbb{S}_3$ на скупу $\mathbb{Z}_2^3$ уређених тројки чије су координате из $\mathbb{Z}_2$.

б) Одредити орбите и стабилизаторе свих елемената из $\mathbb{Z}_2^3$ при овом дејству. Колико има различитих орбита?

$\boxed{5}$ Нека је G рупа реда $2^2 \cdot 19 \cdot 37$.

а) Доказати да G има нормалну подгрупу реда 19.

б) Доказати да G има подгрупу H реда $19 \cdot 37$. Да ли је она и циклична?

в) Да ли је H нормална подгрупа групе G?

Све одговоре детально образложити