Алгебра 2 **16.06.2016.**
Л смер

$\boxed{1}$ Дата је матрица $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

а) Ако је K скуп свих матрица из $M_2(\mathbb{R})$ које комутирају са A, доказати да је K комутативан потпрстен прстена $M_2(\mathbb{R})$.

б) Доказати да је $I = \{X \in K : \ \mathrm{detX} = 0\}$ прост идеал прстена K генерисан елементом $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

в) Констуисати епиморфизам $\phi : K \to \mathbb{R}$ такав да је његово језгро $\mathrm{Ker}\phi = \mathrm{I}$, а затим доказати да је I максималан идеал.

$\boxed{2}$ а) Одредити минимални полином μ_α елемента $\alpha = \sqrt{8 + 2\sqrt{15}}$ над $\mathbb{Q}$.

б) Ако је K факторизацијско поље полинома μ_α, доказати да је $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ и одредити степен раширења $[K : \mathbb{Q}]$.

в) Наћи инверз елемента $\alpha + 1$ у пољу K.

$\boxed{3}$ Нека је $f(X) = X^3 + 3X + 3 \in \mathbb{Z}_5[X]$.

а) Доказати да је полином f нерастављив у прстену $\mathbb{Z}_5[X]$, а затим да је $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_5[X]/_{\langle f \rangle}$ поље.

б) Одредити једну базу векторског простора $\mathbb{F}$ над пољем $\mathbb{Z}_5$ као и број елемената поља $\mathbb{F}$.

в) Одредити сва решења једначине $aY = 3$ у пољу $\mathbb{F}$, где је $a = 2X + 1 + \langle f \rangle$.

$\boxed{4}$ Нека је $R = \mathbb{Z}_2[X]/_{\langle X^3+1 \rangle}$.

а) Доказати да је пресликавање $\pi : R \to R$ дефинисано са $\pi(r) = Xr$ пермутација на скупу R.

б) Ако група G генерисана пермутацијом π дејствује на скуп R пермутовањем, одредити орбите и стабилизаторе свих елемената из R при овом дејству.
Колико има различитих орбита?

$\boxed{5}$ а) Доказати да група G реда 520 има нормалну подгрупу реда 5 или реда 13.

б) Доказати да група G реда 520 има подгрупу M реда 65, а затим да је M циклична.

в) Доказати да је група реда 250000 није проста.

Све одговоре детаљно образложити